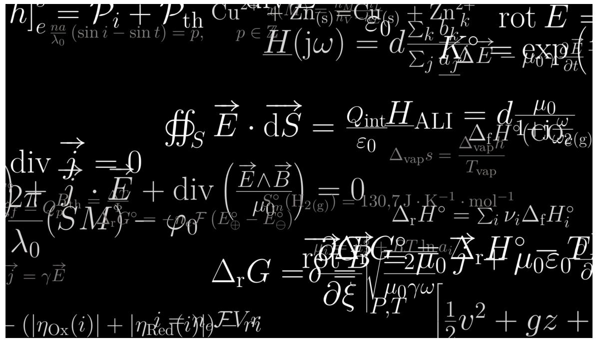
PT PHYSIQUE

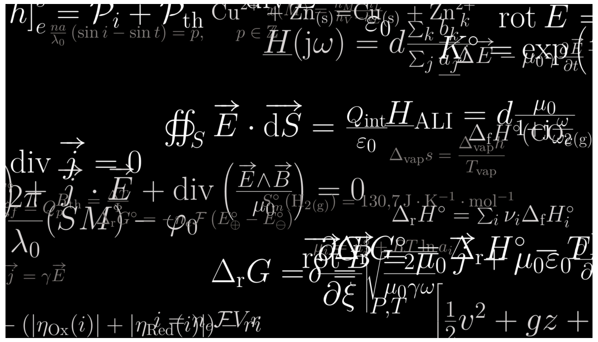
EMAG 2

Champs électrostatiques



OBJECTIFS DU CHAPITRE

- À la fin de ce chapitre, vous devez être capable de :
  - Reconnaître *les plans de symétries, d'antisymétries ainsi que les invariances des distributions de charges électriques*, savoir les exploiter pour en déduire les propriétés du champ $\overrightarrow{E}$ associé ;
  - Connaître et utiliser *le théorème de Gauss* ou l'équation de Maxwell-Gauss pour établir l'expression d'un champ $\overrightarrow{E}$;
  - Connaître le lien entre champ électrique $\overrightarrow{E}$ et *potentiel électrique* V et l'exploiter pour passer de l'un à l'autre des champs ;
  - Connaître *les lois de Laplace et de Poisson* pour établir l'expression du potentiel électrique V ;
  - Connaître et utiliser le *théorème de Gauss gravitationnel* pour établir l'expression du champ de gravité $\overrightarrow{g}$.



LOI DE COULOMB

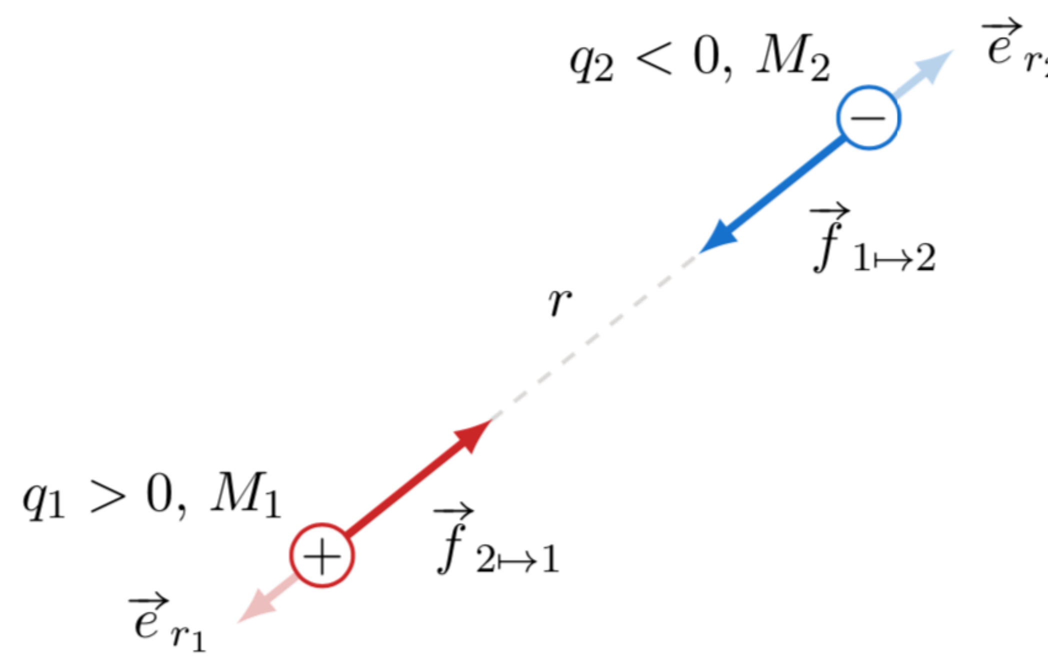
Loi d'interaction électrostatique de Coulomb

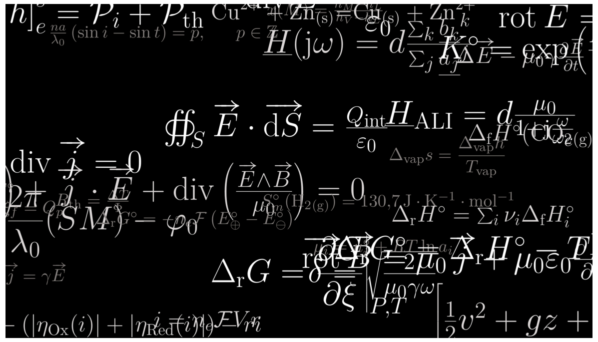
Soit deux charges q_1 et q_2, placées en deux points M_1 et M_2 distants de r.

La force exercée par la charge q_1 sur la charge q_2 s'exprime selon :

$$\vec{f}_{1\mapsto 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\left\|\overrightarrow{M_1M_2}\right\|^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_{r_2}$$

où $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi.10^9}\mathrm{F}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ est la permittivité du vide.





CHAMP ÉLECTROSTATIQUE D'UNE CHARGE PONCTUELLE

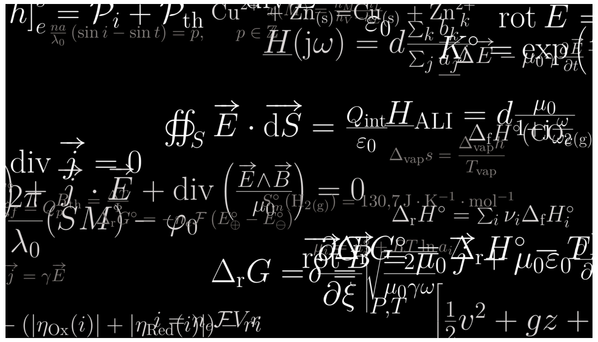
Champ électrostatique d'une charge ponctuelle

On appelle *champ électrostatique* d'une charge ponctuelle, la grandeur vectorielle, notée $\vec{E}$, exprimée en $\mathrm{V} \cdot \mathrm{m}^{-1}$ et qui vérifie en tout point M de l'espace :

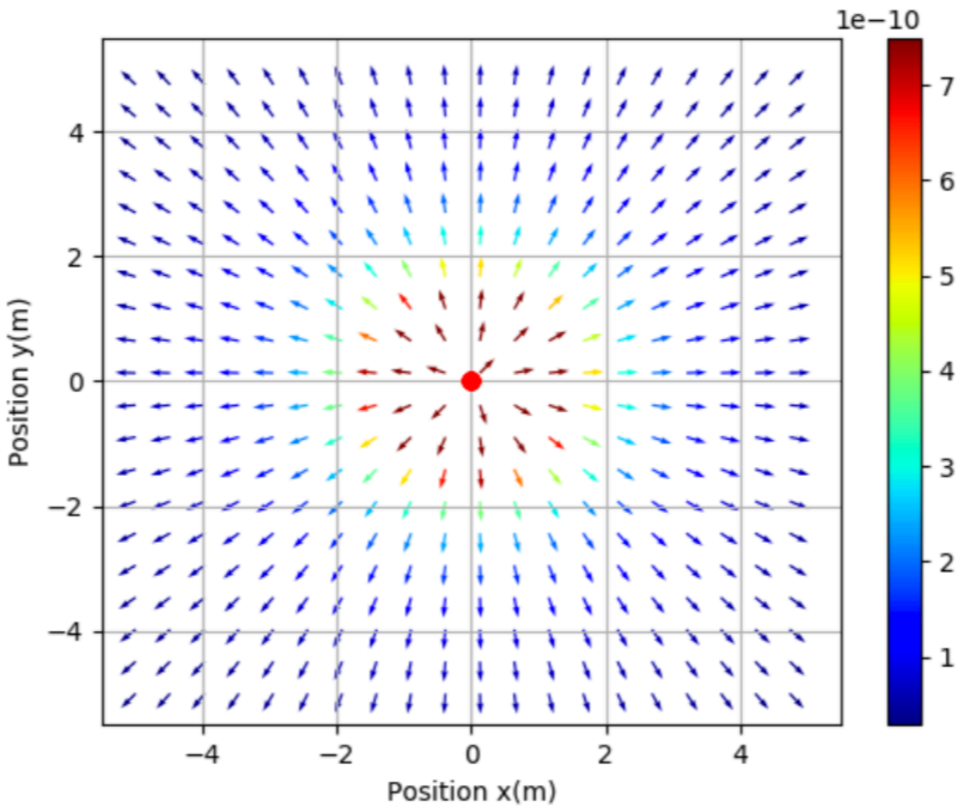
$$\vec{E}(M) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{M_1M}}{\left\|\overrightarrow{M_1M}\right\|^3} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{e_r}$$

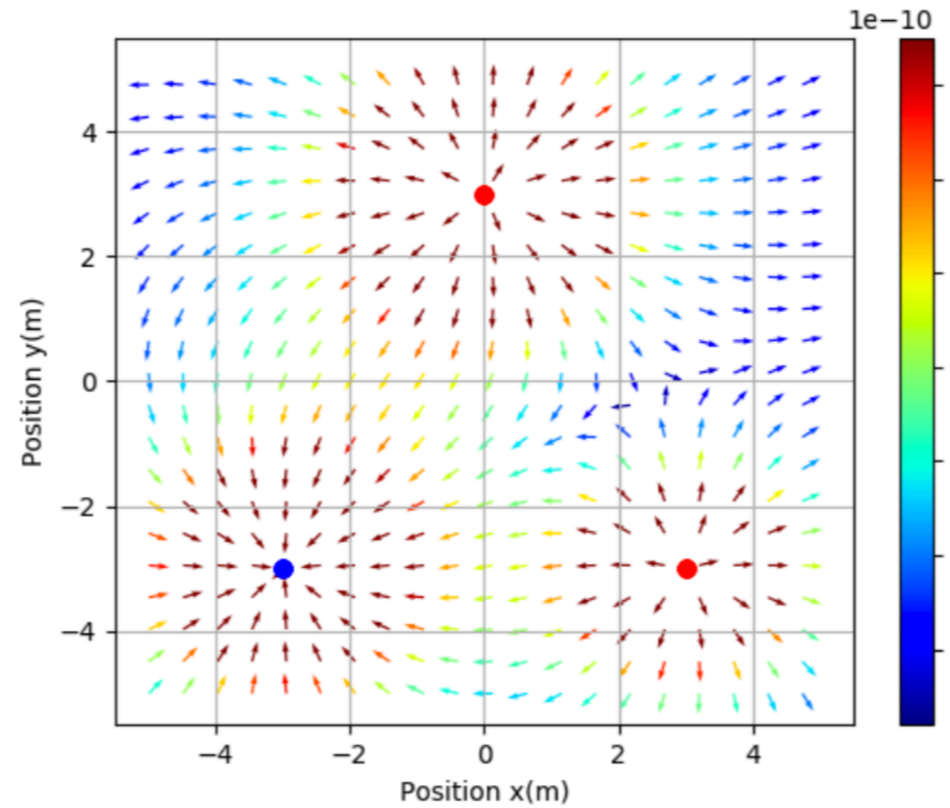
où $r = \|M_1M\|$, $\vec{e_r} = \dfrac{\overrightarrow{M_1M}}{\|\overrightarrow{M_1M}\|}$ et $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi.10^9} \mathrm{F} \cdot \mathrm{m}^{-1}$

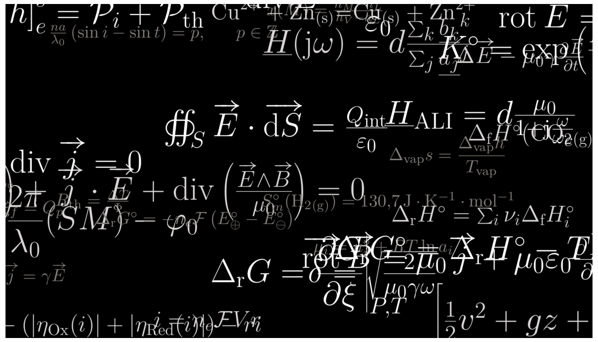
Champ électrostatique	Ordre de grandeur ($\mathrm{V} \cdot \mathrm{m}^{-1}$)
Surface de la Terre	$100 \sim 150$
Lumière solaire	1000
Surface de la Terre lors d'un orage	$10.10^3 \sim 100.10^3$
Champ proche d'un atome	10^9



CARTE DE CHAMP ÉLECTROSTATIQUE





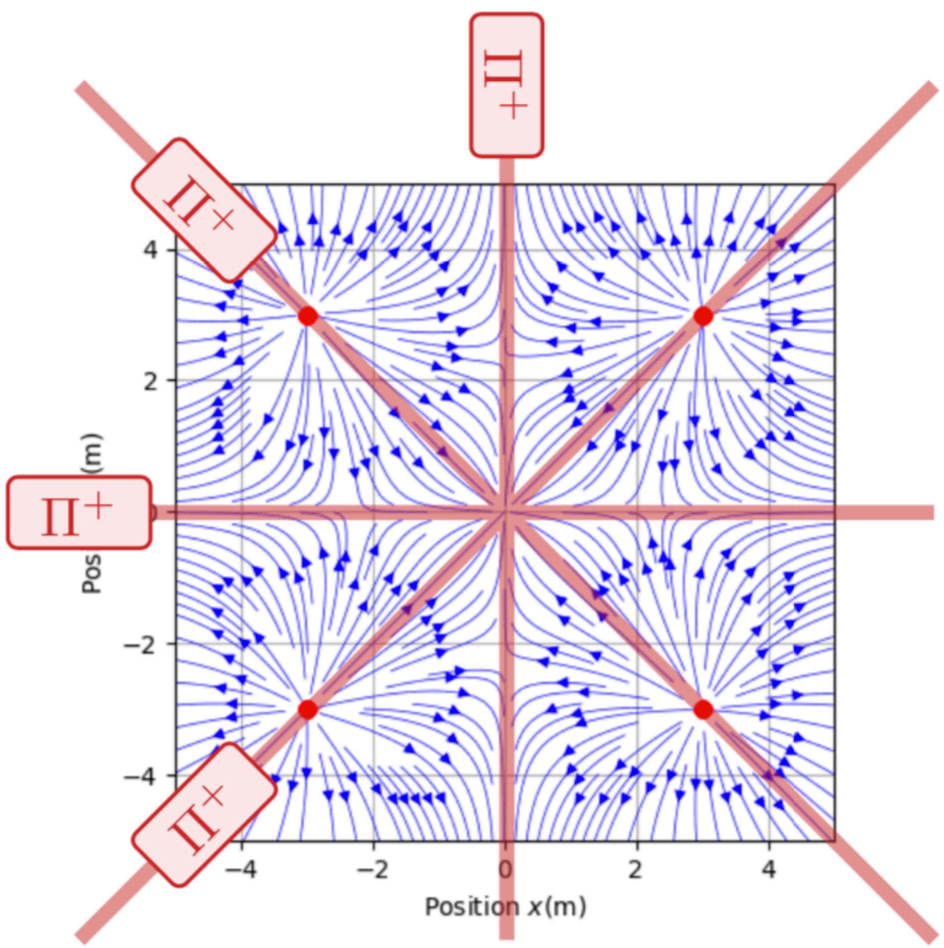


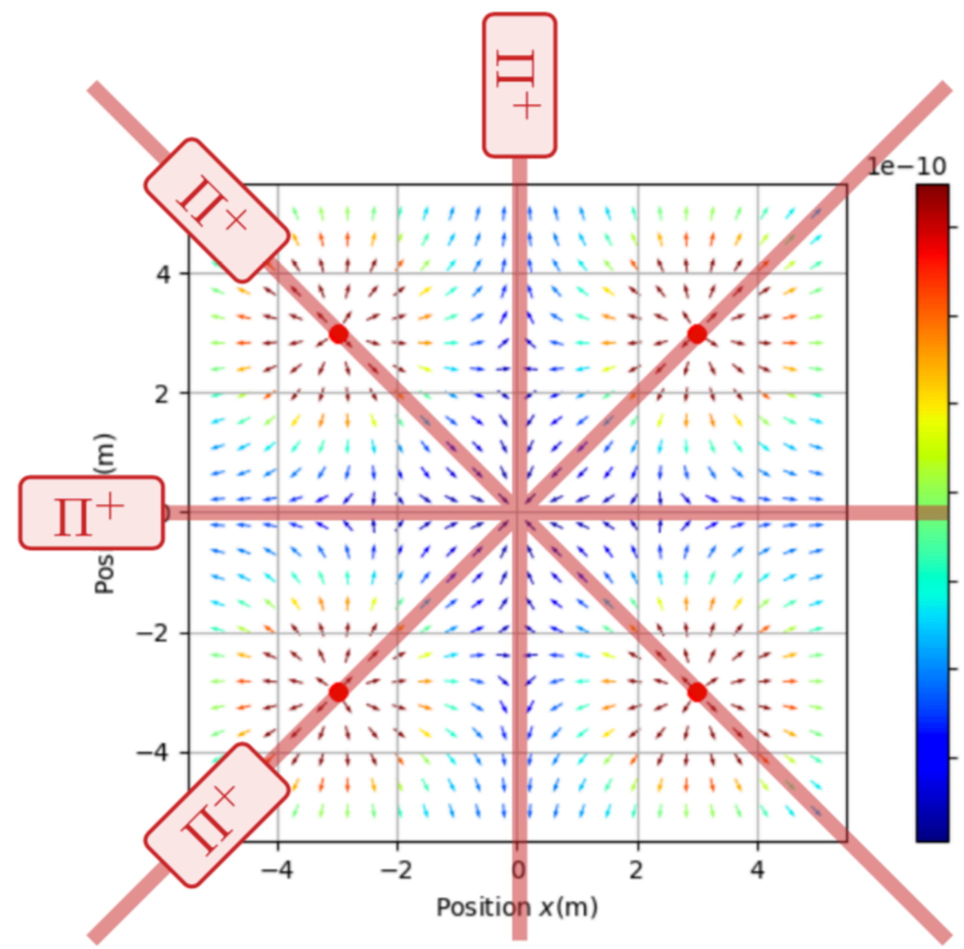
PLAN DE SYMÉTRIE DES SOURCES : Π^+

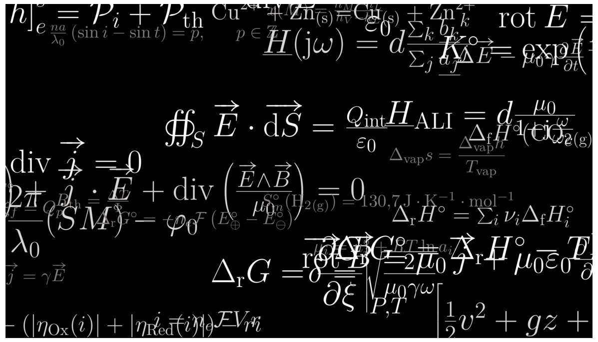
Plan de symétrie des charges électriques

On appelle plan de symétrie des charges électriques, tout plan noté Π^+ tel que, si M' est l'image de M par Π^+ alors :

$$\rho(M') = \rho\left(\mathrm{sym}_{\Pi^+}(M)\right) = \rho(M)$$







CONSÉQUENCE DES PLANS Π^+ SUR LE CHAMP $\overrightarrow{E}$

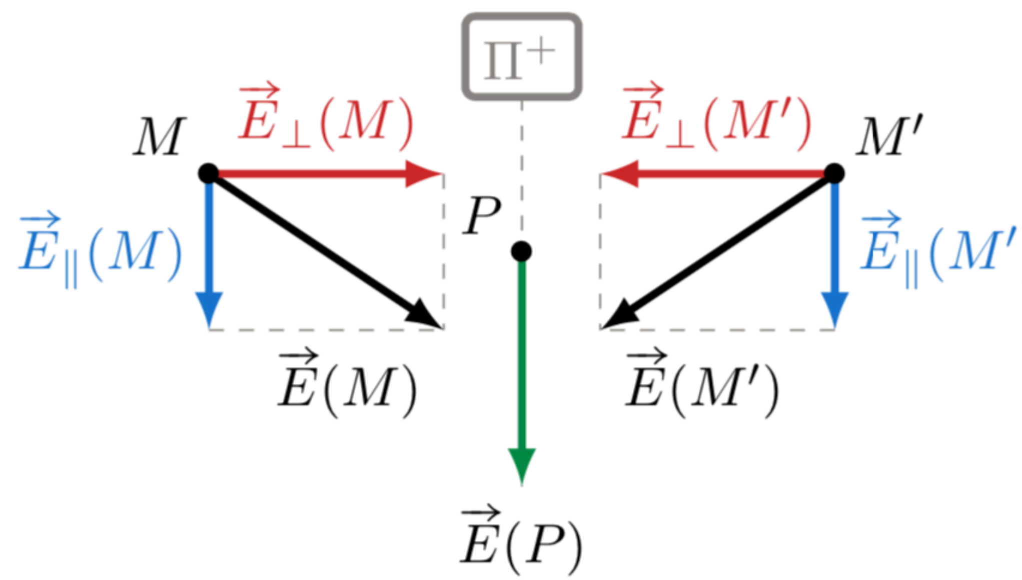
Conséquences d'un plan de symétrie des charges pour un champ $\vec{E}$

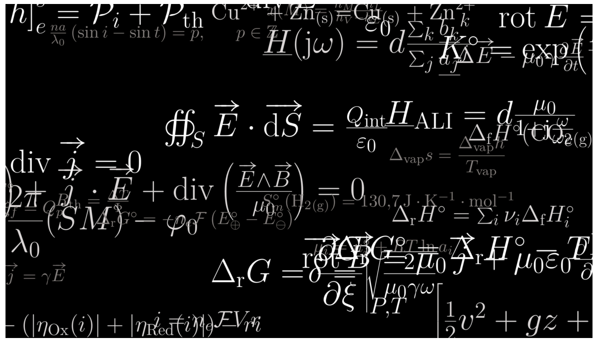
Le champ électrostatique $\vec{E}(P)$, créé en un point P d'un plan de symétrie des charges Π^+, appartient à ce plan de symétrie.

Pour tout point M', image de M par Π^+, on a :

$$\vec{E}(M') = +\mathrm{sym}_{\Pi^+}\left(\vec{E}(M)\right)$$

c'est à dire : $\begin{cases} \vec{E}_\perp(M') = -\vec{E}_\perp(M) \\ \vec{E}_\parallel(M') = +\vec{E}_\parallel(M) \end{cases}$



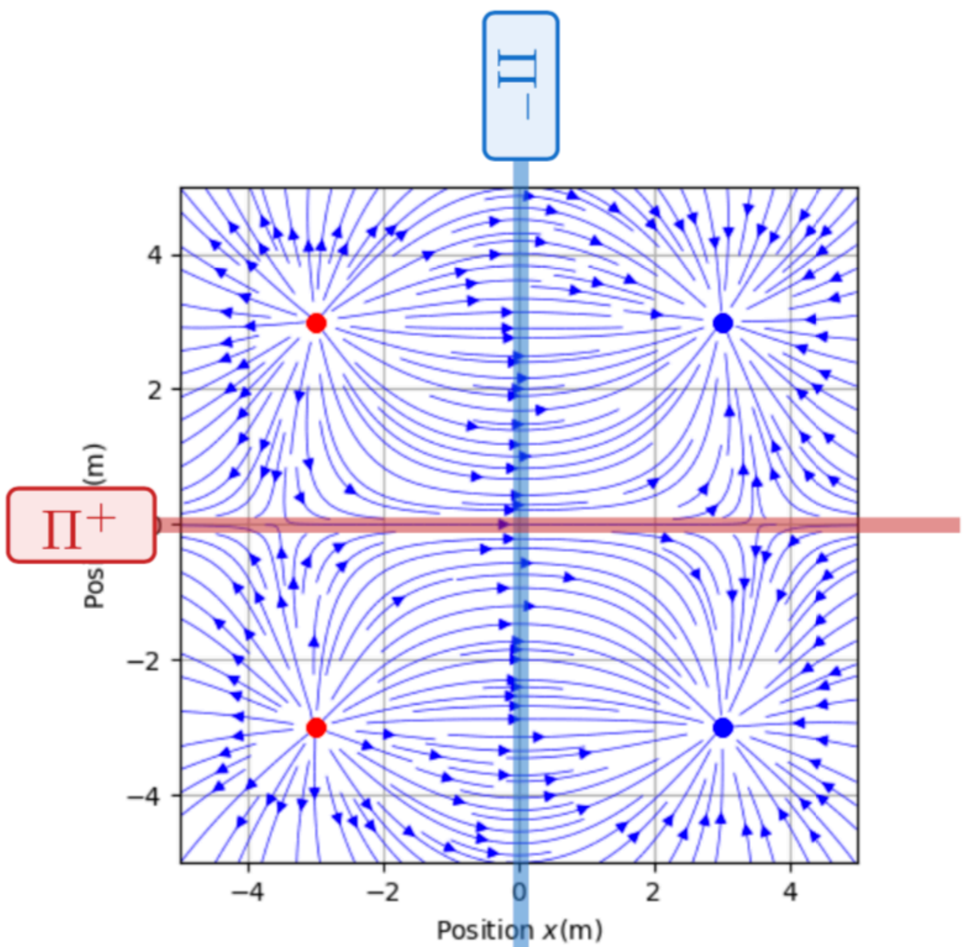


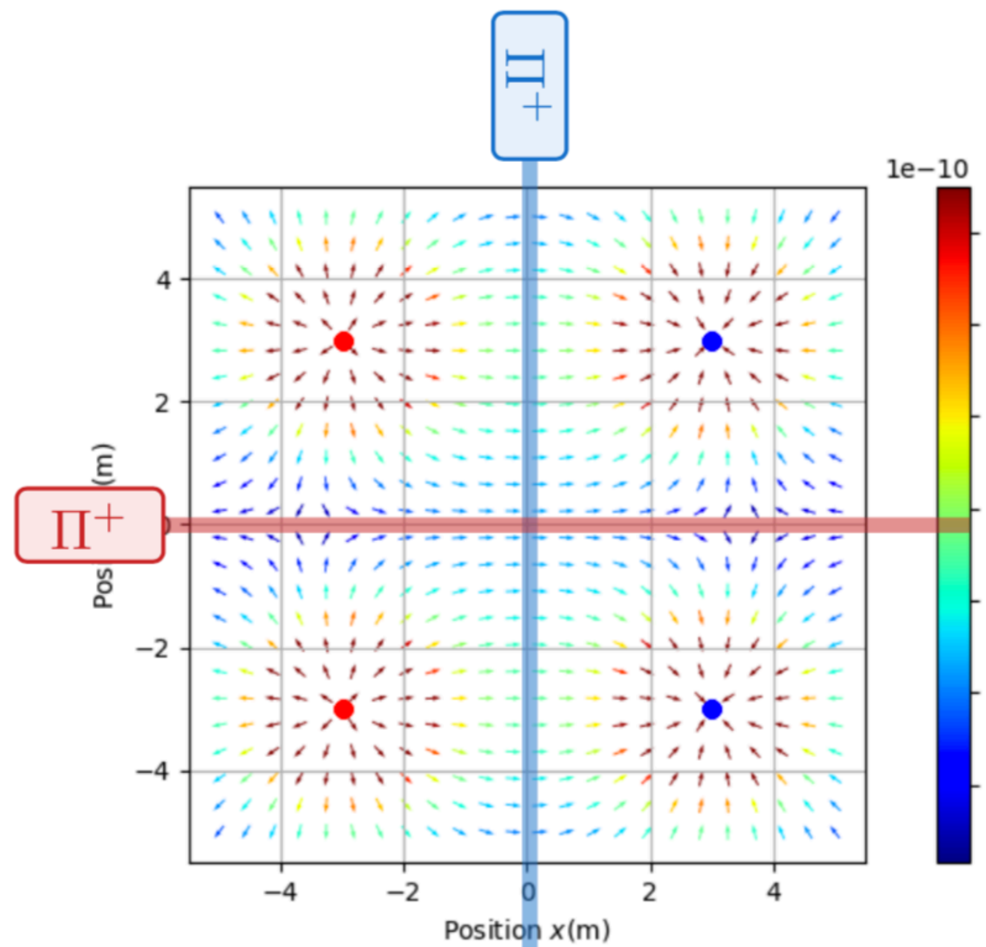
PLAN D'ANTI-SYMÉTRIE DES SOURCES : Π^-

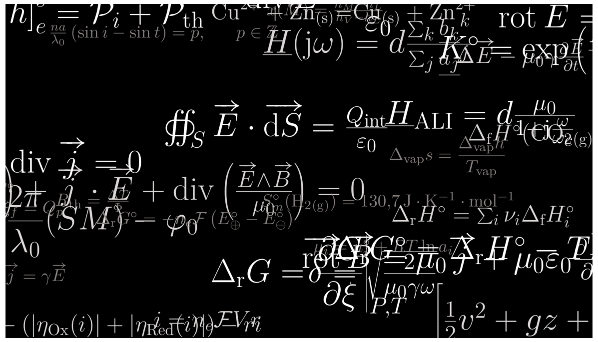
Plan d'anti-symétrie des charges électriques

On appelle plan d'antisymétrie des charges électriques, tout plan noté Π^- tel que, si M' est l'image de M par Π^- alors :

$$\rho(M') = \rho\left(\mathrm{sym}_{\Pi^-}(M)\right) = -\rho(M)$$







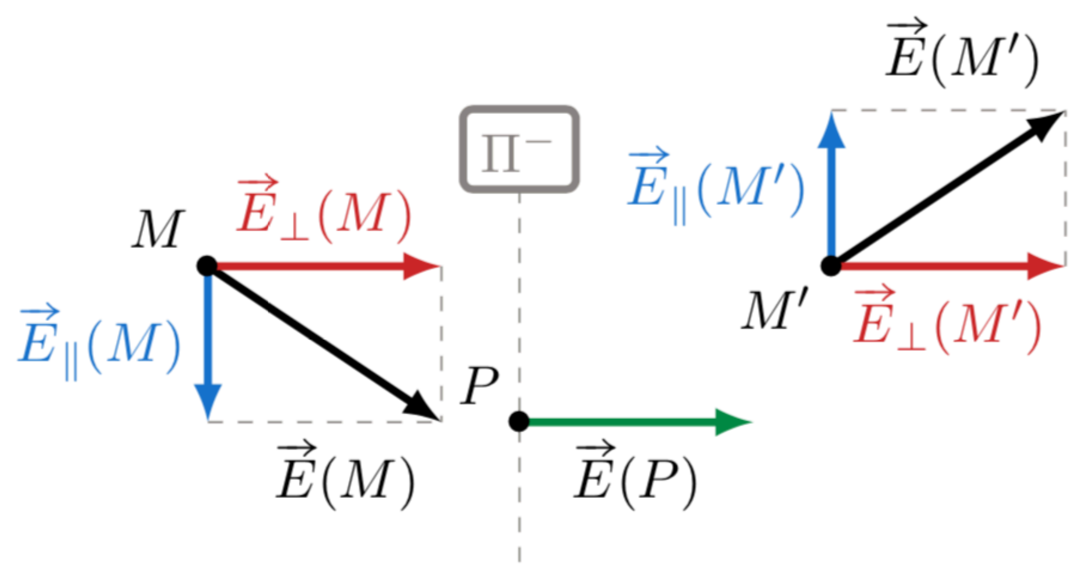
CONSÉQUENCE DES PLANS Π^- SUR LE CHAMP $\overrightarrow{E}$

Conséquences d'un plan d'anti-symétrie des charges pour un champ $\overrightarrow{E}$

Le champ électrostatique $\overrightarrow{E}(P)$, créé en un point P d'un plan d'anti-symétrie des charges Π^-, est perpendiculaire à ce plan d'anti-symétrie.

Pour tout point M', image de M par Π^-, on a : $\overrightarrow{E}(M') = -\mathrm{sym}_{\Pi^-}\left(\overrightarrow{E}(M)\right)$, c'est à dire :

$$\begin{cases} \overrightarrow{E}_\perp(M') = +\overrightarrow{E}_\perp(M) \\ \overrightarrow{E}_\parallel(M') = -\overrightarrow{E}_\parallel(M) \end{cases}$$



EXERCICE D'APPLICATION I

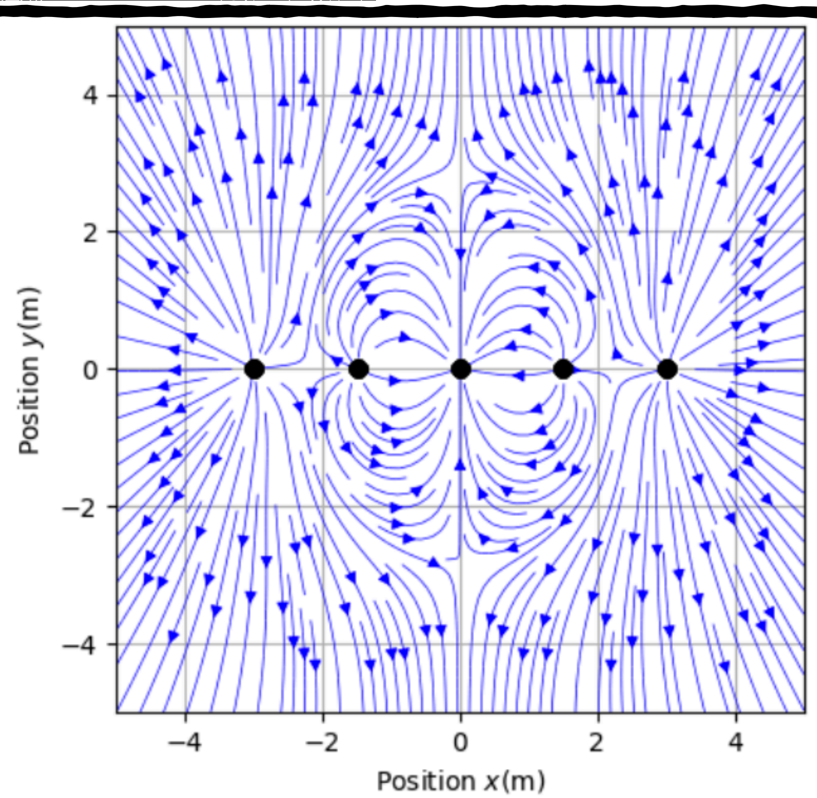


Fig. 14.17 – Distribution de charges ponctuelles et lignes de courant

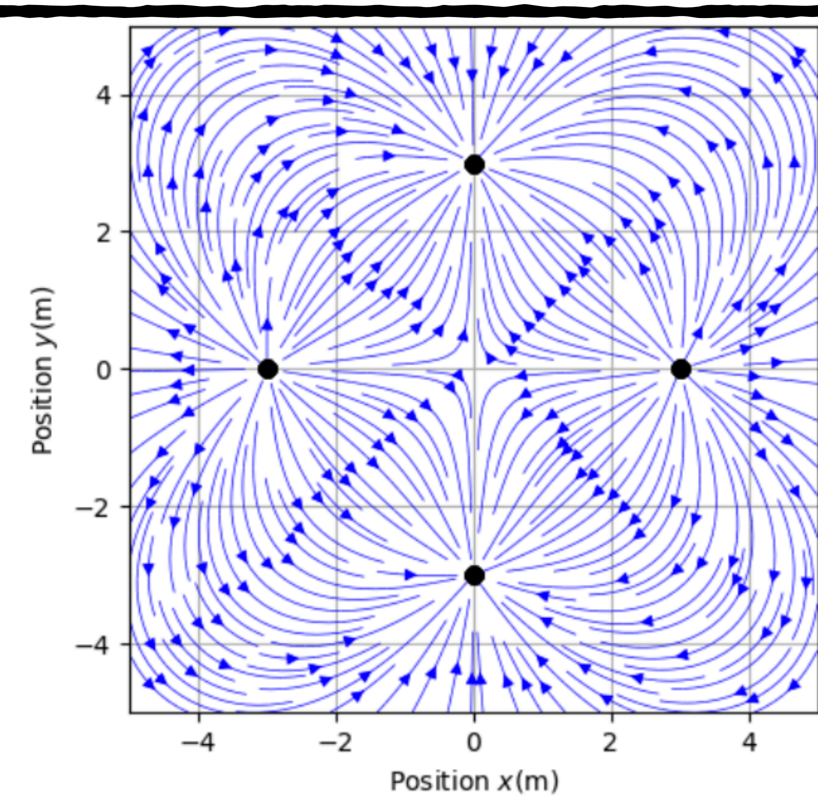
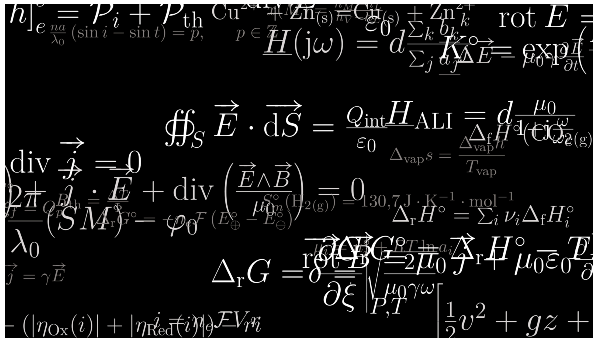


Fig. 14.18 – Distribution de charges ponctuelles et lignes de courant

1. On s'intéresse à la distribution de charges de la figure 14.17,
   (a) Donner le signe de chacune des charges.
   (b) Existe-t-il des plans de symétrie dans cette distribution de charges ponctuelles ?
   (c) Existe-t-il des plans d'anti-symétrie dans cette distribution de charges ponctuelles ?
2. On s'intéresse à la distribution de charges de la figure 14.18,
   (a) Donner le signe de chacune des charges.
   (b) Existe-t-il des plans de symétrie dans cette distribution de charges ponctuelles ?
   (c) Existe-t-il des plans d'anti-symétrie dans cette distribution de charges ponctuelles ?



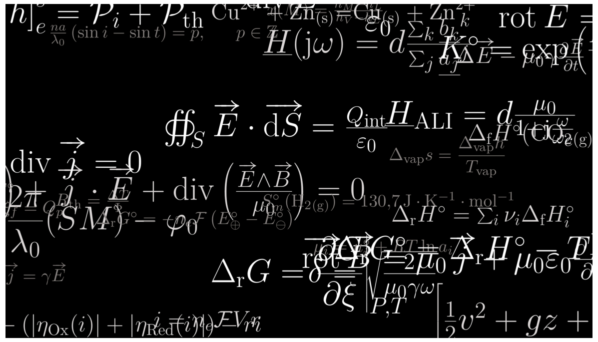
THÉORÈME DE GAUSS

Théorème de Gauss

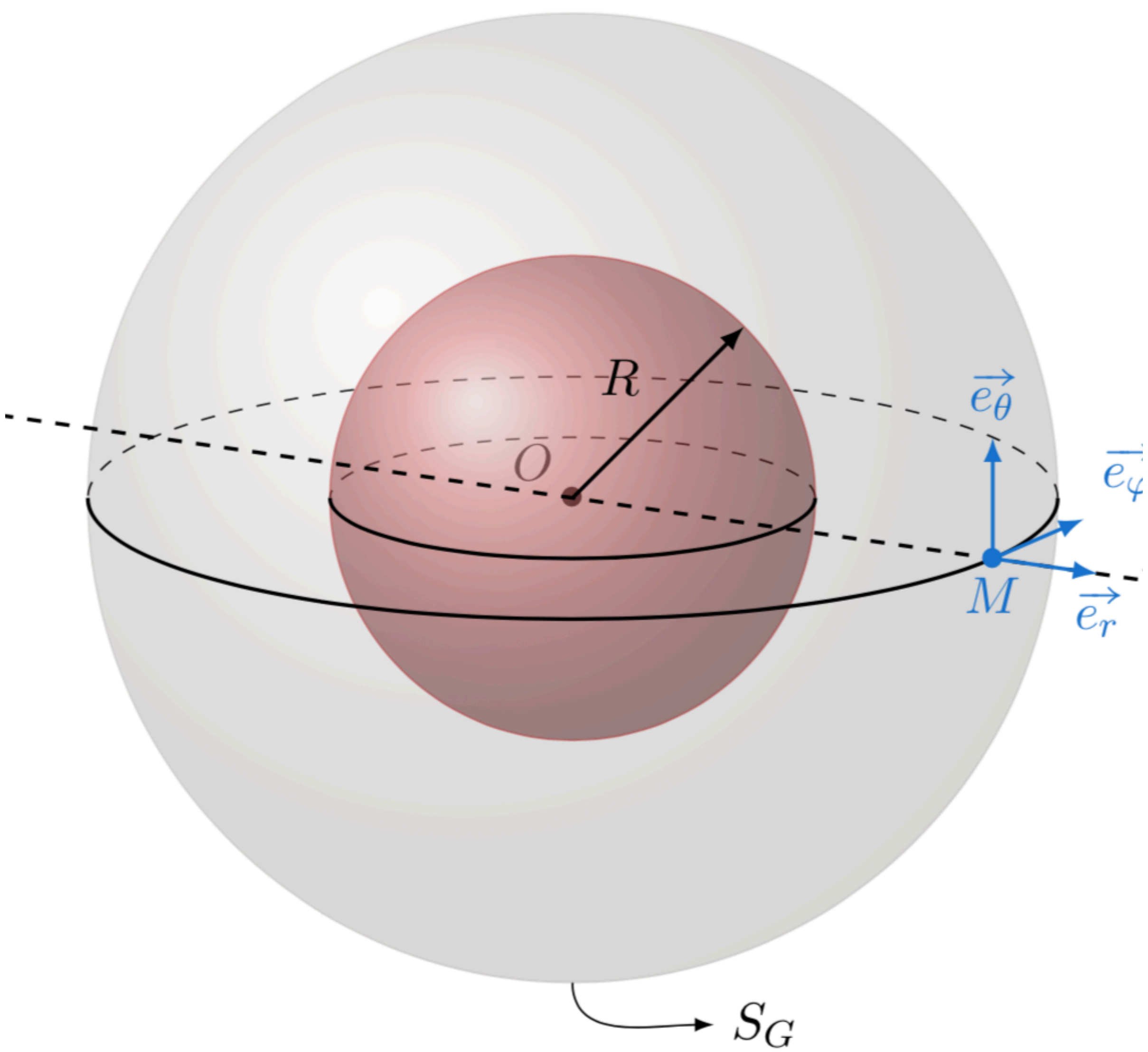
Le flux du champ électrique $\vec{E}$ à travers toute surface fermée S_G vérifie :

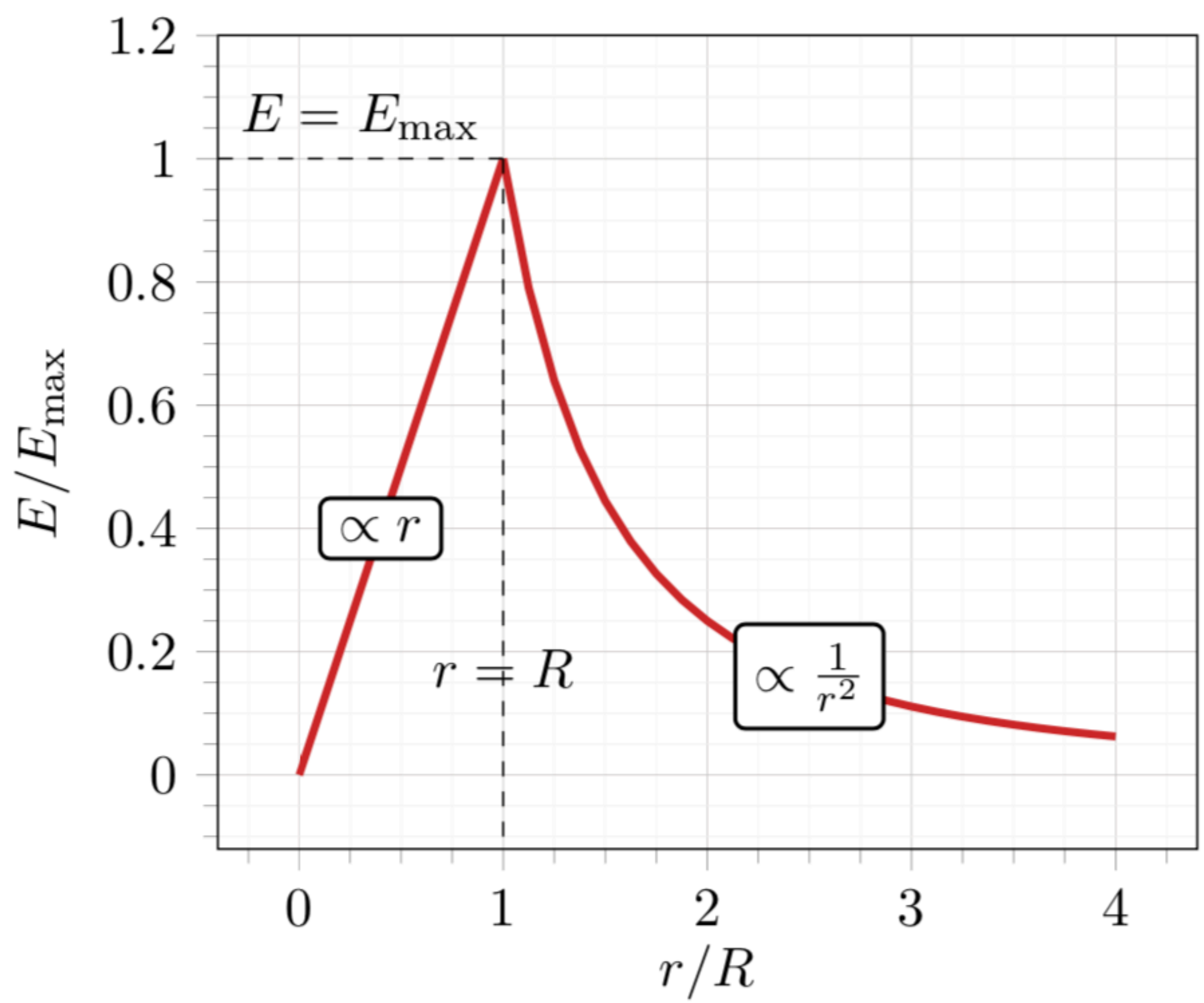
$$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

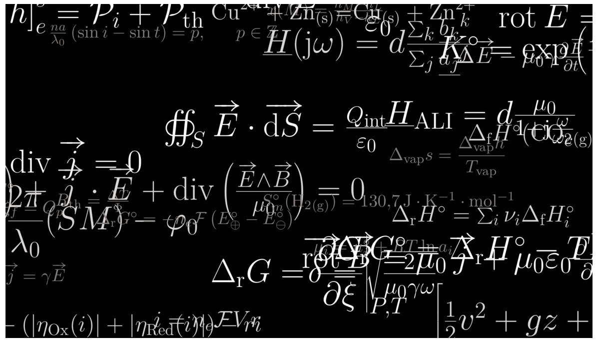
où ε_0 est la permittivité du vide et Q_{int} est la charge totale présente dans le volume V délimité par S_G.



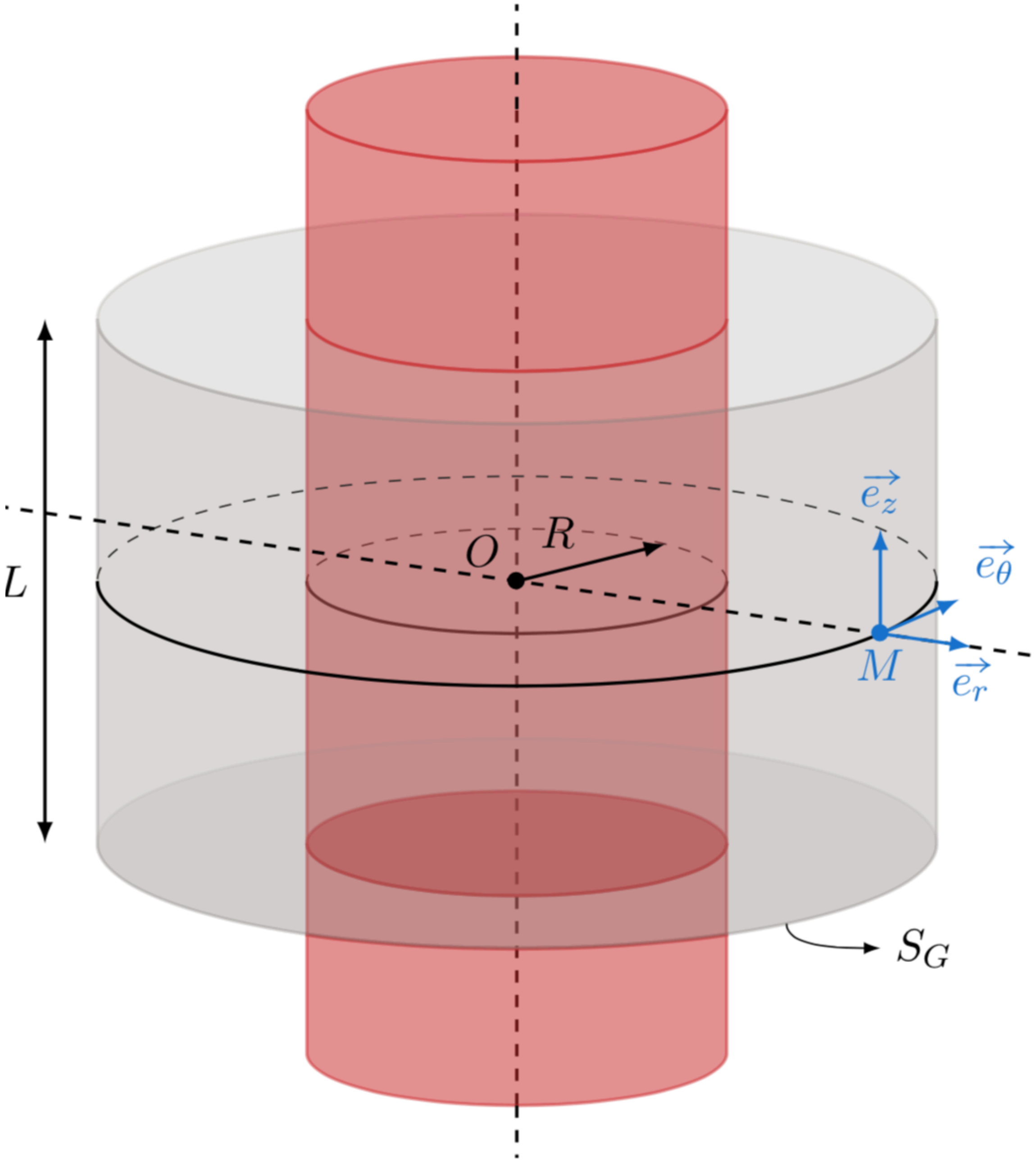
CALCULS DE CHAMPS : SPHÈRE AVEC $\rho(r \leq R) = \rho_0$

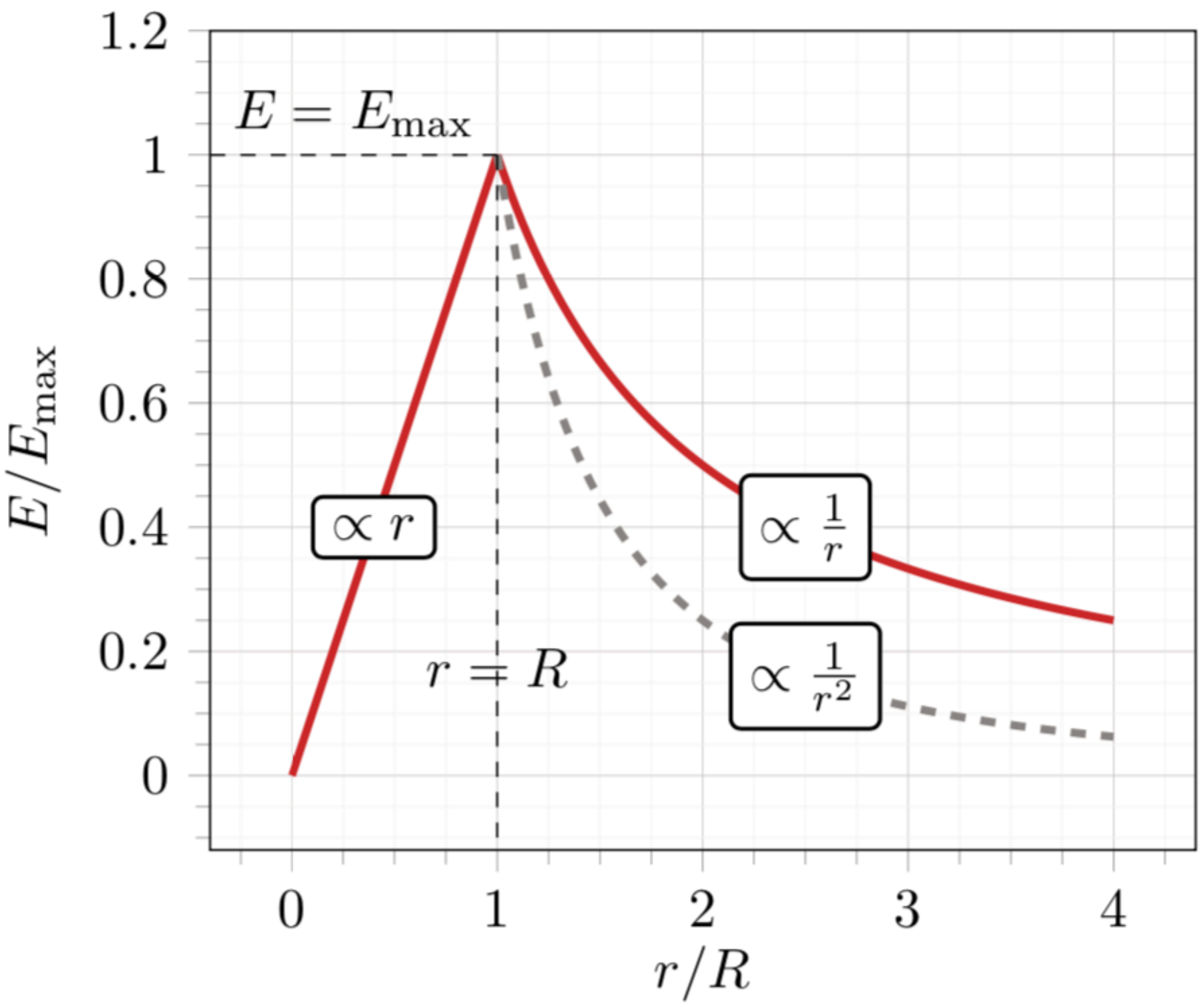


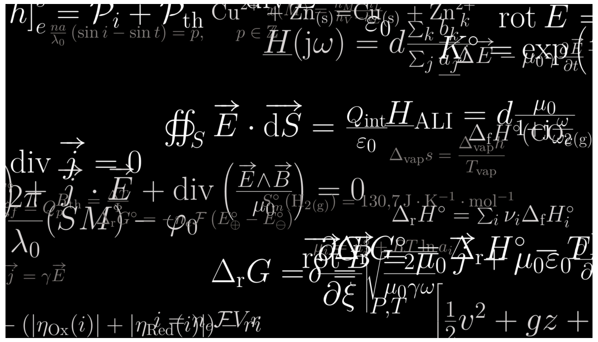




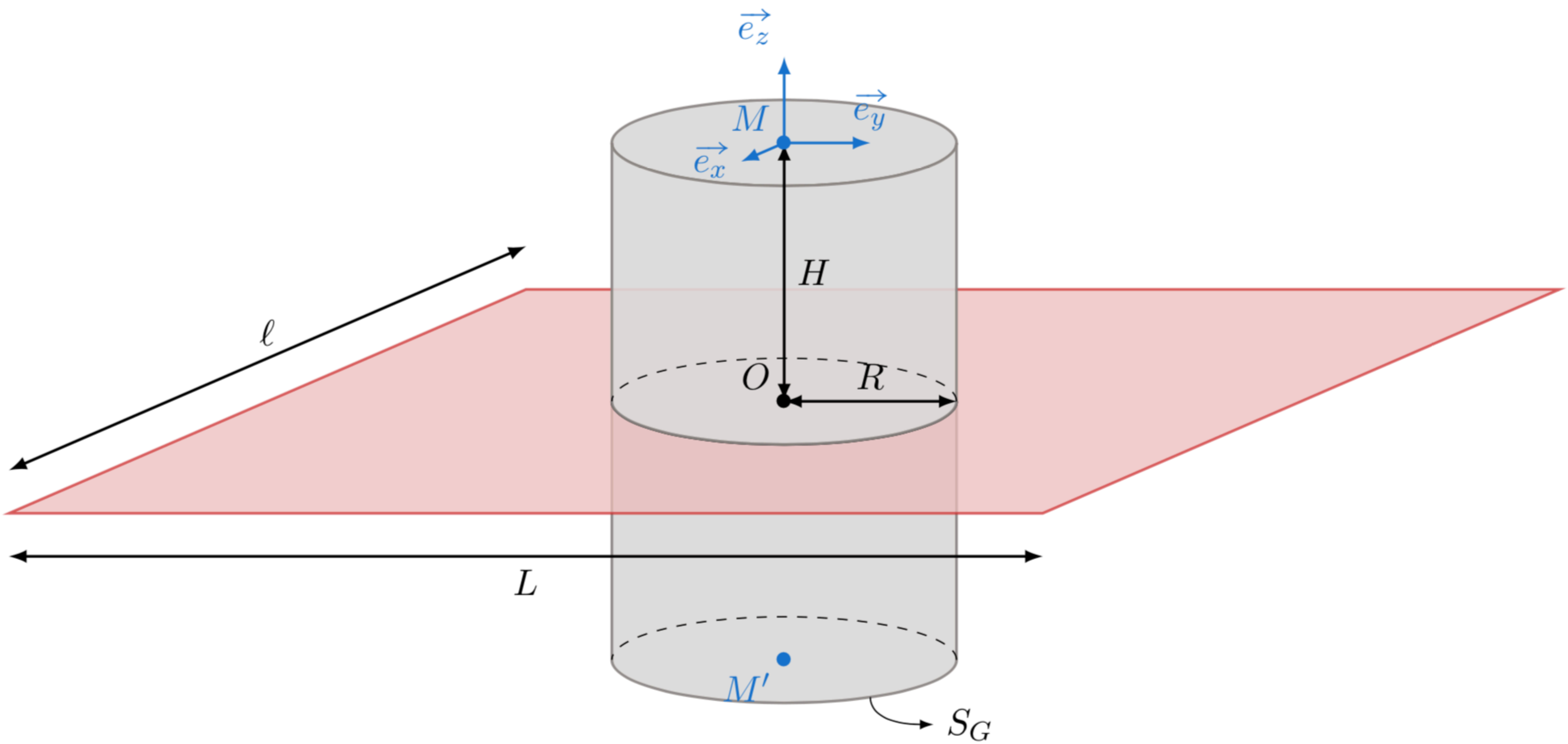
CALCULS DE CHAMPS : CYLINDRE AVEC $\rho(r \leq R) = \rho_0$

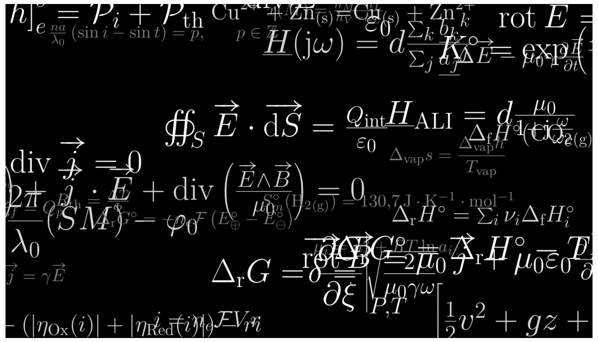




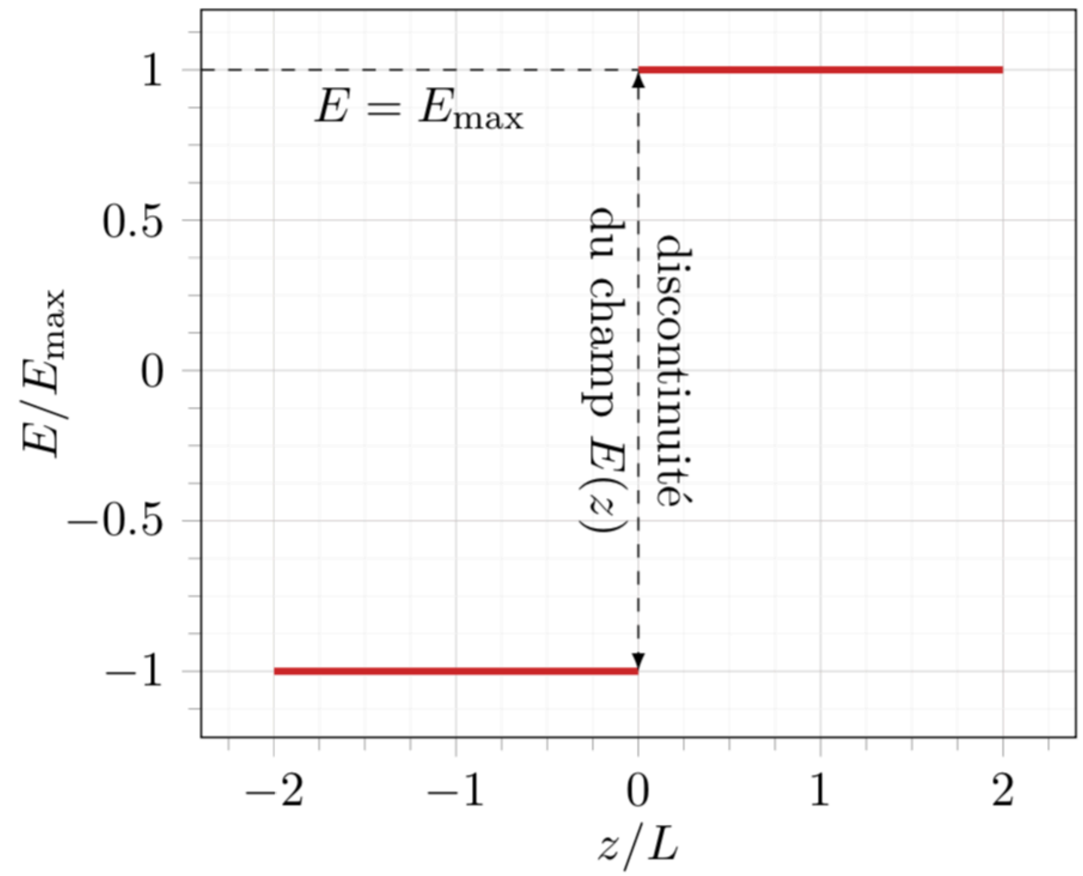


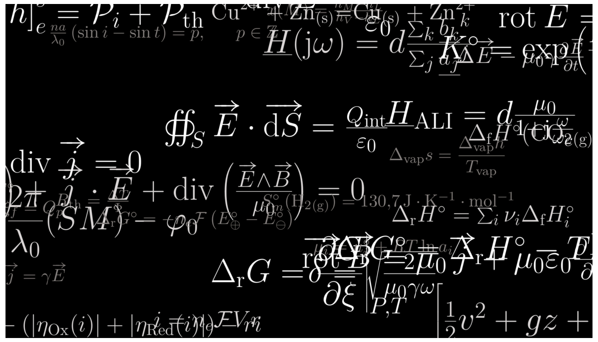
CALCULS DE CHAMPS : PLAQUE AVEC $\sigma(z=0)=\sigma_0$





CALCULS DE CHAMPS : PLAQUE AVEC $\sigma(z=0)=\sigma_0$



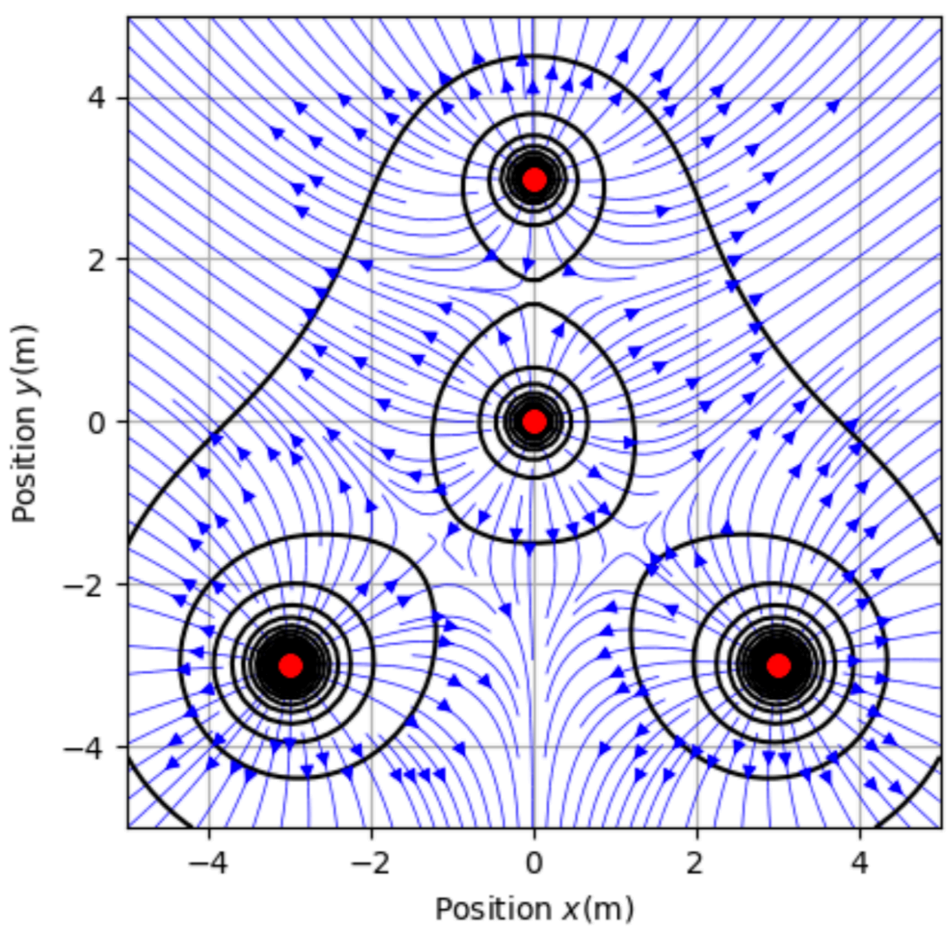


POTENTIEL ÉLECTROSTATIQUE

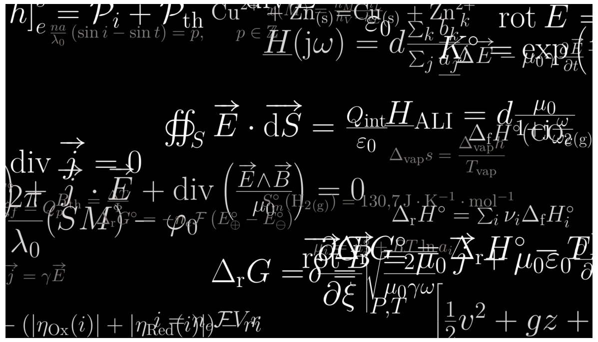
Lien entre potentiel et champ électrostatique

Le potentiel V et le champ $\vec{E}$ d'un point M de l'espace vérifient en régime statique :

$$\mathrm{d}V = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} \Leftrightarrow \vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$$



Ligne de champ électrostatique et contours de potentiel électrostatique



EXERCICE D'APPLICATION 2

1. Calculer le potentiel électrostatique V, associé à la distribution de charge sphérique, donnant le champ suivant :

$$\begin{cases} \overrightarrow{E}(r > R) = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}\overrightarrow{e_r} \\ \overrightarrow{E}(r < R) = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0}\frac{r}{R^3}\overrightarrow{e_r} \end{cases}$$

   On fixera le potentiel $V(r = R) = 0$.

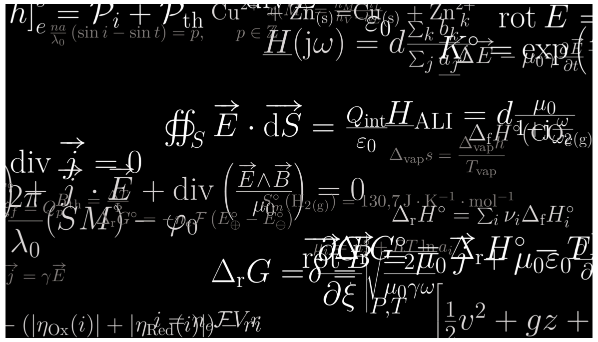
2. Faire de même pour la distribution de charge cartésienne, donnant le champ suivant

$$\begin{cases} \overrightarrow{E}(z > 0) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{e_z} \\ \overrightarrow{E}(z < 0) = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{e_z} \end{cases}$$

   On fixera le potentiel $V(z = 0) = 0$.

Données :

- Coordonnées sphériques : $\overrightarrow{\text{grad}}\, A = \frac{\partial A}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A}{\partial \varphi}\overrightarrow{u_\varphi}$.
- Coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{\text{grad}}\, A = \frac{\partial A}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{\partial A}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$.



ÉQUATION DE POISSON

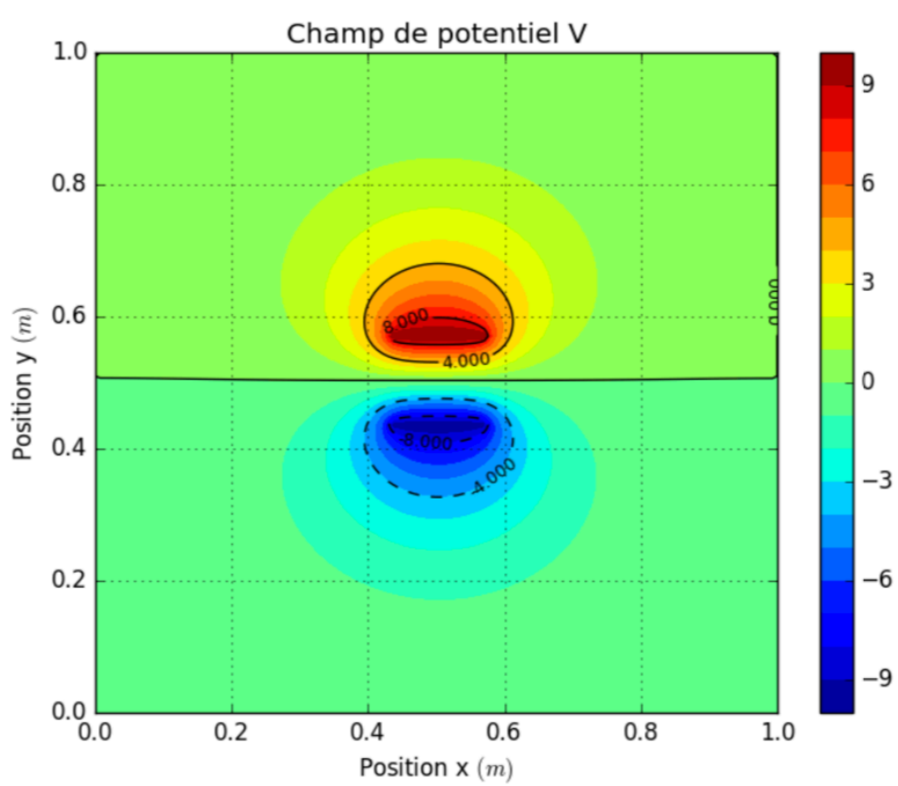
Équation de Poisson et de Laplace

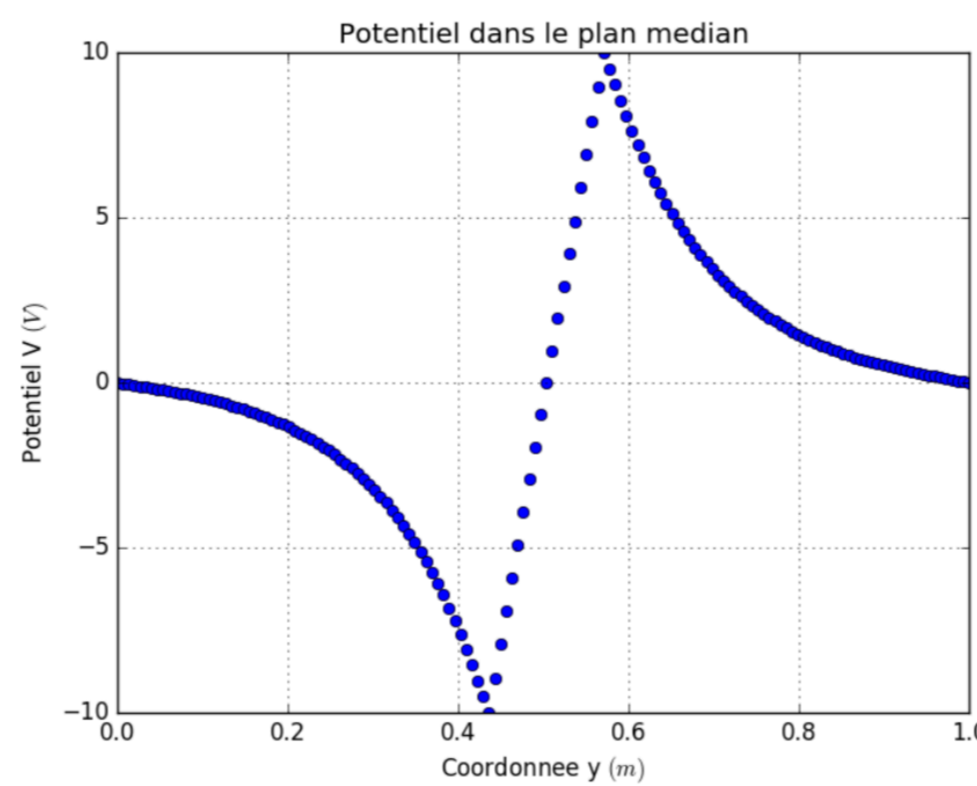
En régime stationnaire, et dans un milieu caractérisé par une densité volumique de charge ρ, le champ potentiel électrostatique obéit à l'équation de POISSON :

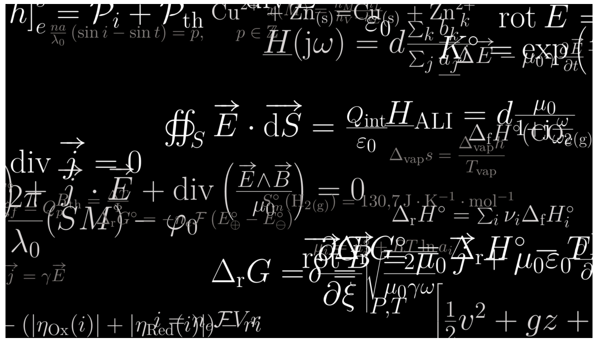
$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

En régime stationnaire, et dans un milieu vide de charges, le champ potentiel électrostatique obéit à l'équation de LAPLACE :

$$\Delta V = 0$$



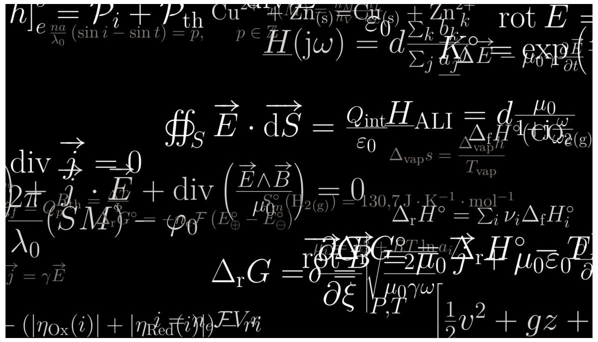




EXERCICE D'APPLICATION 3

On considère l'espace inter-armatures d'un condensateur plan. On le modélise par deux armatures planes de dimensions supposées infini selon les axes Ox et Oy, placée aux côtes $z = \pm a$. L'armature placée en $z = a$ est portée au potentiel V_+ et l'armature placée en $z = -a$ est portée au potentiel V_-.

1. Quelle est la base de projection la plus adaptée à ce problème ?
2. À partir d'une étude des invariances des charges, déterminer les variables spatiales dont dépend le potentiel $V(M)$.
3. Utiliser la loi de Poisson pour exprimer le potentiel $V(z)$ entre les deux armatures. En déduire l'expression de $\overrightarrow{E}$ entre les deux armatures.



LOI DE NEWTON

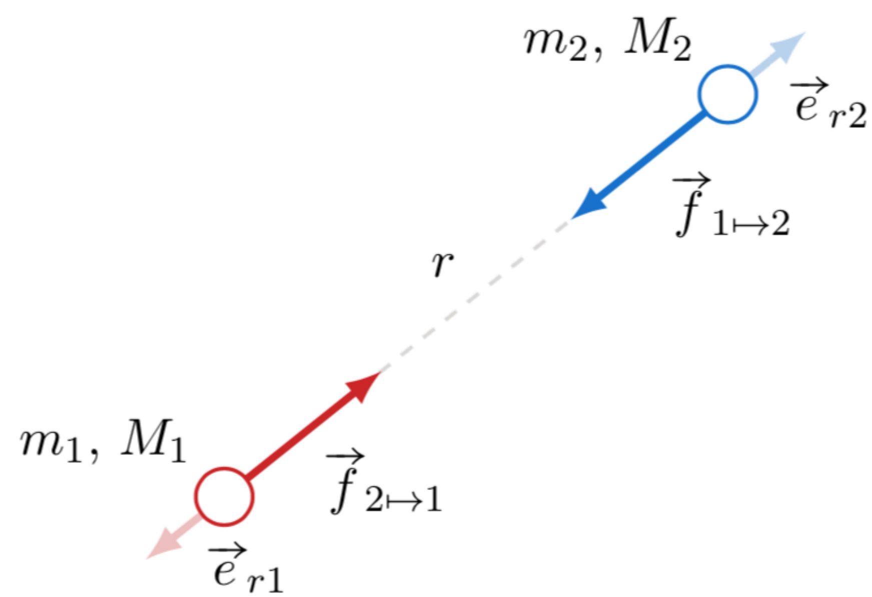
Loi d'interaction gravitationnelle de Newton

Soit deux corps ponctuels M_1 et M_2 distants de r, de masse respective m_1 et m_2.

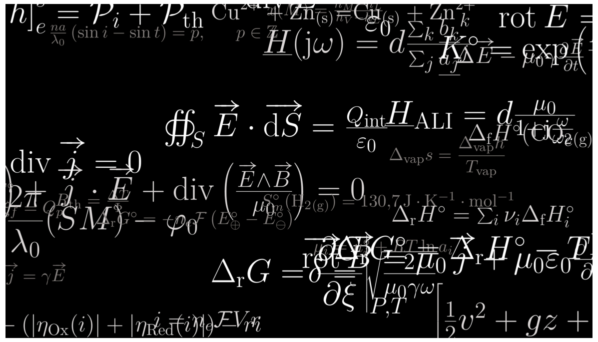
La force exercée par la masse m_1 sur la charge m_2 s'exprime selon :

$$\overrightarrow{f}_{1\mapsto 2} = -\mathcal{G}m_1m_2\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\left\|\overrightarrow{M_1M_2}\right\|^3} = -\mathcal{G}\frac{m_1m_2}{r^2}\overrightarrow{e}_{r_2}$$

où $\mathcal{G} = 6{,}67\times 10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$ est la constante gravitationnelle.



	Électrostatique	Gravitation
Source	charge électrique q	masse m
Force associée	$\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E}$	$\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{g}$
Champ associé à une source ponctuelle	$\overrightarrow{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\overrightarrow{e_r}$	$\overrightarrow{g}(M) = \mathcal{G}\frac{m}{r^2}\overrightarrow{e_r}$



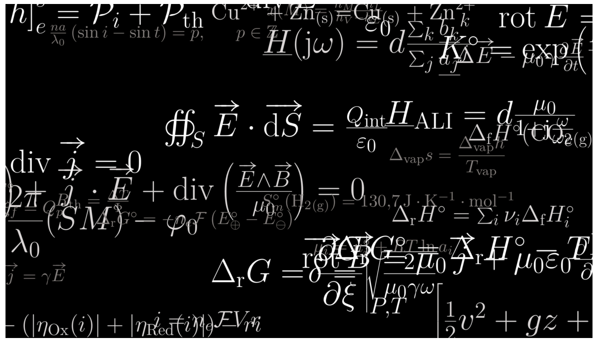
THÉORÈME DE GAUSS

Théorème de Gauss appliqué au champ gravitationnel

Le flux du champ gravitationnel $\vec{g}$ à travers une surface $\mathcal{S}$ fermée vérifie :

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{g} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = -4\pi\mathcal{G}M_{\text{int}}$$

où $\mathcal{G}$ est la constante gravitationnelle et M_{int} est la masse totale inclue dans le volume $\mathcal{V}$ délimité par $\mathcal{S}$.



CALCULS DE CHAMPS : SPHÈRE AVEC $\rho(r \leq R) = \rho_0$