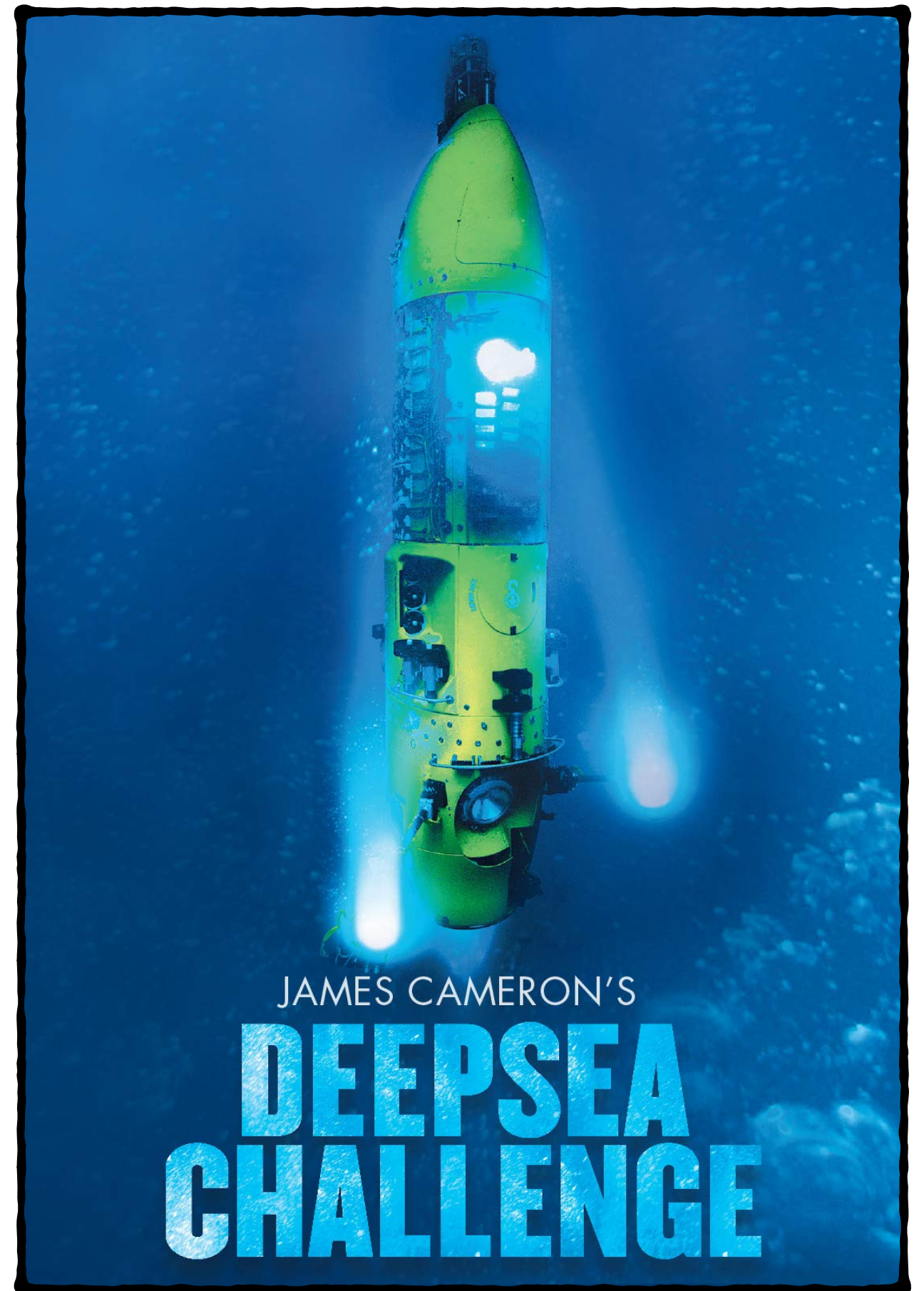


PT PHYSIQUE

MECA I

Statique des fluides



OBJECTIFS DU CHAPITRE

- À la fin de ce chapitre, vous devez être capable de :
 - Établir la *relation la statique des fluides* ;
 - Établir l'expression du *profil de pression* dans divers fluides modèles ;
 - Calculer la résultante des forces de pression sur une surface plane ou courbe *en utilisant au mieux les symétries du problème* ;
 - Exprimer et utiliser la *poussée d'Archimède* dans un problème de mécanique impliquant un fluide.

$$h]_e^{\frac{na}{\lambda_0}(\sin i - \sin t) = p, \quad p \in \frac{H(j\omega)}{d_{\sum_j \frac{b_j}{\lambda_j}}}, \quad \text{rot } E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{dD}{dt}$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{d}{dt} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dI}{dt}$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{div } \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) = 0 \quad \Delta_r H^\circ = \sum_i \nu_i \Delta_r H_i^\circ$$

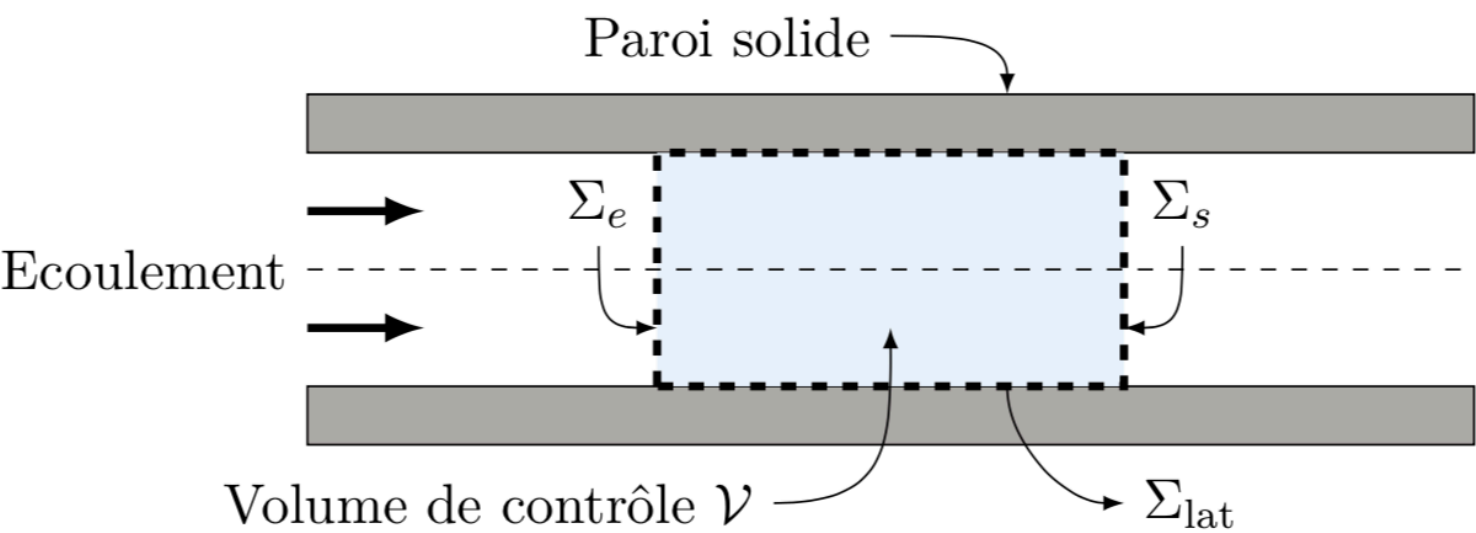
$$\frac{1}{\lambda_0} \frac{d}{dt} \left(\frac{SM}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} \left(\frac{SM}{\rho} \right) \quad \Delta_r G = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial G}{\partial \xi} \right)_{P,T} = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial G}{\partial \xi} \right)_{P,T}$$

$$-(|\eta_{\text{Ox}}(i)| + |\eta_{\text{Red}}(i)|) \mathcal{E} V_i$$

VOLUME DE CONTRÔLE

Volume de contrôle

On appelle *volume de contrôle*, noté \mathcal{V} , un domaine de l'espace fini dans lequel se trouve un fluide statique ou en mouvement. Ce domaine est limité par un ensemble de surfaces de contrôle (réelle ou fictives), dont la réunion est une surface fermée $S(\mathcal{V})$.



$$\begin{array}{l} n]e=\frac{P_i}{\lambda_0}+P_{th}^{Cu^{+2}+Zn(s)}=Cu_0^{+2}+Zn^{+2} \quad \text{rot } E=\\ \frac{na}{\lambda_0}(\sin i-\sin t)=p, \quad p \in \frac{H(j\omega)}{H(j\omega)}=d\frac{\sum_k K_k}{\sum_j L_j}=\exp\{j\frac{\omega}{\omega_0}(\frac{t}{\omega_0})\}\\ \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \frac{H_{ALI}}{\Delta_{vap} s} = d \frac{\mu_0}{\Delta_{vap} h} \frac{1}{T_{vap}} (\frac{\omega}{\omega_0})^2 \\ \text{div} \frac{\vec{x}}{x} = 0 \\ 2\pi \frac{\vec{A} \cdot \vec{E}}{(SM)^2} + \text{div} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0^S(H_2(g))} \right) = 0 \\ \frac{1}{T} = \frac{1}{\varphi_0} \frac{1}{(SM)^2} = \varphi_0^{-1} \frac{1}{(E_{\oplus}^S - E_{\oplus}^S)(H_2(g))} = 130.71 \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1} \\ \frac{\lambda_0}{j} = \gamma \vec{E} \quad \Delta_r G = 0 \\ \frac{\partial \Delta_r G}{\partial \xi} = 2 \mu_0 \frac{\partial}{\partial T} \sqrt{\mu_0 \gamma \omega} \\ -(n_{Ox}(i) + |n_{red}(i)|) E_{Vr} \\ \frac{1}{2} v^2 + g z +$$

Une particule fluide peut être immobile ou en déplacement, et a une masse constante. Son volume peut être variable.

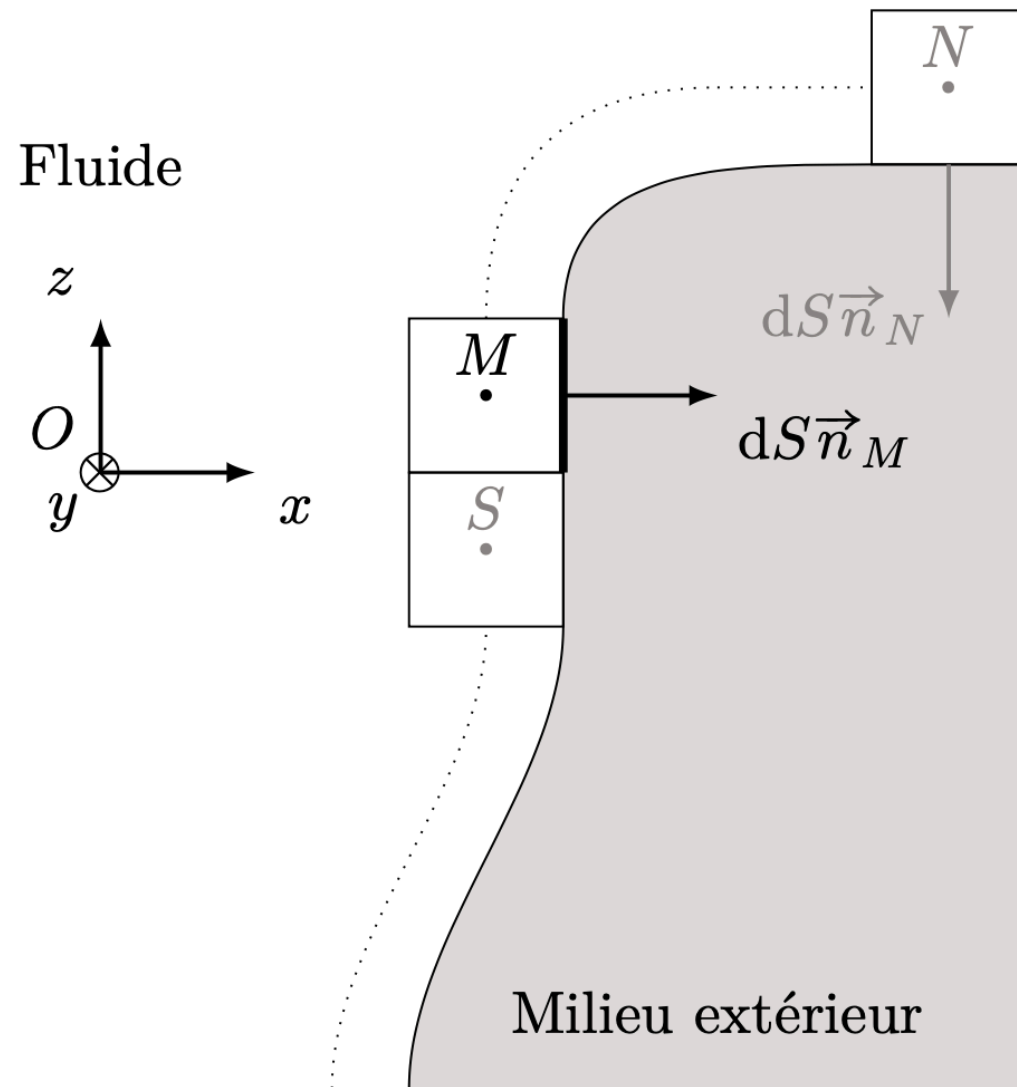
On appelle *approximation des milieux continus*, l'hypothèse de continuité et de dérivabilité des propriétés thermomécaniques du milieu considéré dans le volume de contrôle \mathcal{V} .

$$\begin{aligned}
 n]_e^{\frac{na}{\lambda_0}(\sin i - \sin t)} &= p_i + p_{th} \\
 p &\in \mathbb{R} \\
 H(j\omega) &= d_{\sum_j \frac{b_j}{a_j}} \exp\left(\frac{\sum_k b_k}{\sum_l a_l} \right) \text{rot } E = \\
 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \\
 \Delta_{vap} s &= \frac{\Delta_{vap} h}{T_{vap}} \\
 \text{div } \vec{A} &= 0 \\
 2\pi \vec{A} \cdot \vec{E} + \text{div} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) &= 0 \\
 \Delta_r H^\circ &= \sum_i \nu_i \Delta_f H_i^\circ \\
 \Delta_r G &= \Delta_r H^\circ - T \Delta_r S^\circ \\
 \frac{\partial}{\partial \xi} \sqrt{\mu_0 \gamma \omega} &= \frac{1}{2} v^2 + gz +
 \end{aligned}$$

EXERCICE D'APPLICATION I

1. Établir les forces volumiques associées aux forces suivantes :
 - (a) poids de la particule fluide ;
 - (b) force gravitationnelle appliquée à la particule fluide ;
 - (c) force d'inertie d'entraînement $\vec{F} = m\omega^2 \overrightarrow{OM}$,
 - (d) force de LORENTZ.

FORCE DE PRESSION I



FORCE DE PRESSION 2

Force de pression élémentaire

On appelle *force de pression élémentaire*, la force associée au champ de pression $P(M)$ de la particule fluide centrée en M et appliquée à une surface élémentaire dS attenante à M .

Cette force vérifie :

$$\overrightarrow{dF}(M) = P(M)dS\vec{n}_M$$

où \vec{n}_M est le vecteur unitaire perpendiculaire à la surface dS , orienté de la particule fluide vers la surface sur laquelle s'exerce la force.

OUTILS MATHÉMATIQUES

Développement de Taylor

Soit f une fonction de l'intervalle réel I dans E un espace vectoriel normé, n fois dérivable en a un élément de I , alors la formule de TAYLOR s'écrit :

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + \frac{df}{dx}(a) \frac{(x-a)}{1!} + \frac{d^2f}{dx^2}(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + \frac{d^n f}{dx^n}(a) \frac{(x-a)^n}{n!} + R_n(x)$$

Opérateur gradient

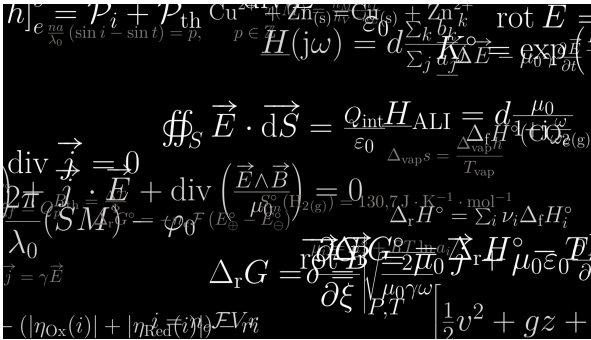
On appelle gradient, l'opérateur transformant un champ scalaire en champ vectoriel, et vérifiant :

$$df = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\vec{\ell} \quad (2.1)$$

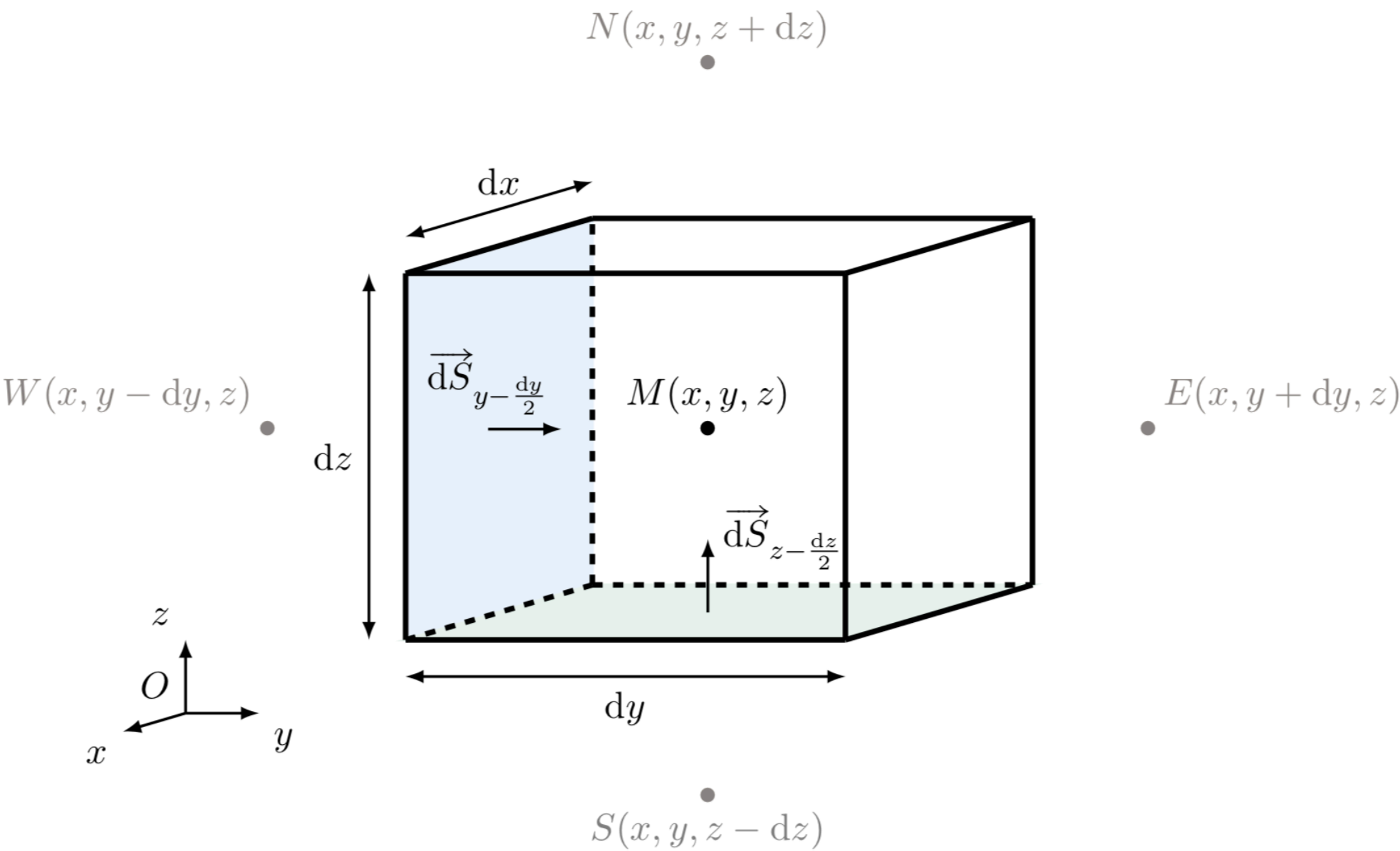
Opérateur gradient en coordonnées cartésiennes

Soit le champ scalaire $T : M(x, y, z) \rightarrow T(x, y, z)$, le gradient de T s'exprime en coordonnées cartésiennes par :

$$\overrightarrow{\text{grad}} T = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{y,z} \vec{u}_x + \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{x,z} \vec{u}_y + \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{x,y} \vec{u}_z \quad (2.2)$$



RELATION DE LA STATIQUE DES FLUIDES I



RELATION DE LA STATIQUE DES FLUIDES 2

Relation de la statique des fluides

Un fluide au repos, soumis à un ensemble de forces volumiques de résultante \vec{f}_{vol} , obéit à la relation de la statique des fluides :

$$\overrightarrow{\text{grad}} P = \vec{f}_{\text{vol}}$$

Dans le cas où le poids est la seule force de volume, cette relation devient :

$$\overrightarrow{\text{grad}} P = \mu \vec{g}$$

où μ est la masse volumique du fluide considéré, exprimée en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Dans le cas où \vec{g} est orienté selon $-\vec{u}_z$, cette relation devient :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{dP}{dz} = -\mu g$$

$$h]_{e\frac{na}{\lambda_0}(\sin i - \sin t) = p,}^{\text{Cu}^{2+} + \text{Zn}^{2+} \rightleftharpoons \text{Cu}^{+} + \text{Zn}^{+}} \quad \text{rot } E = \frac{1}{\mu_0} \text{grad } A$$

$$H(j\omega) = d \frac{\sum_k b_k z^k}{\sum_j a_j z^j} = \exp \left\{ \int_0^{\omega} \frac{H(j\omega)}{j\omega} d(j\omega) \right\}$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad \Delta_{\text{vap}} S = \frac{\Delta_{\text{vap}} H}{T_{\text{vap}}}$$

$$\text{div } \vec{A} = 0 \quad \oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \Delta_{\text{vap}} H = \sum_i \nu_i \Delta_f H_i^\circ$$

$$2\pi \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I \omega^2 \right) = \tau \omega$$

$$\frac{\lambda_0}{j} = \gamma \vec{E} \quad \Delta_r G = \Delta_r G^\circ + RT \ln Q$$

$$+ (|\eta_{\text{Ox}}(i)| + |\eta_{\text{Red}}(i)|) F V_i$$

$$\frac{1}{2} v^2 + gz + \frac{p}{\rho} = \text{cte}$$

RELATION DE L'HYDROSTATIQUE

Fluide incompressible & indilatable

On appelle *fluide incompressible*, tout fluide dont le volume demeure constant sous l'action d'une pression externe.

On appelle *fluide indilatable* tout fluide dont le volume demeure constant sous l'action d'une variation de température.

La masse volumique d'un fluide incompressible et indilatable vérifie :

$$\mu = \mu_0 = \text{cte}$$

Pression hydrostatique

Dans une fluide incompressible de masse volumique constante μ_0 , placé dans le seul champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = +g\vec{u}_z$, la pression est une fonction affine croissante de la profondeur et :

$$P(z) = P_0 + \mu_0 g z$$

EXERCICE D'APPLICATION 3

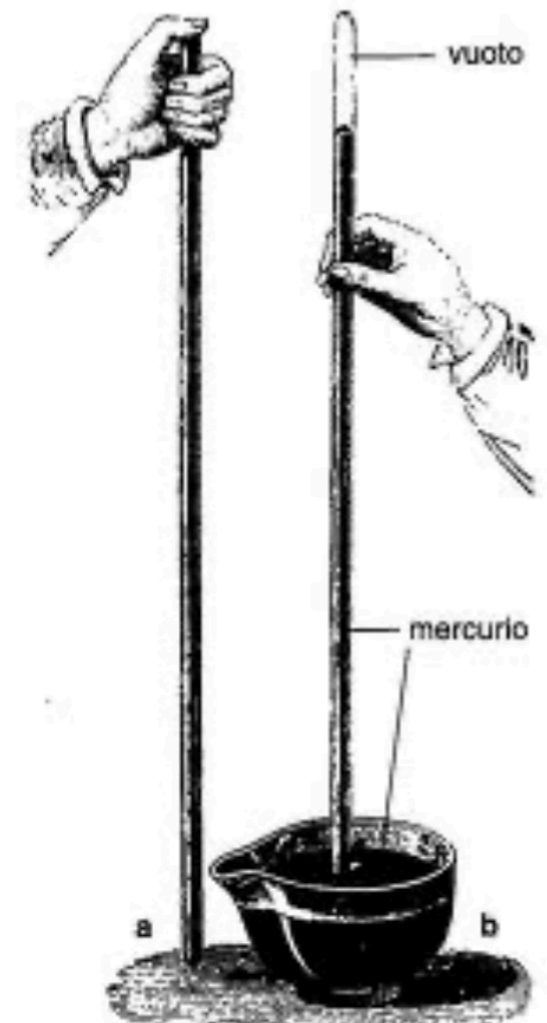
On considère un tube cylindrique vertical de section S et de hauteur $H \simeq 1,0\text{ m}$ totalement rempli de mercure que l'on renverse dans une cuve, elle-même pleine de mercure, sans perdre de matière. Le dispositif est maintenu à la température $T_0 = 293\text{ K}$. On note $\mu = 13,4 \times 10^3\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ la masse volumique du mercure supposée indépendante de la pression.

On complète le dispositif de la figure ci-contre d'un axe Oz , orienté selon la verticale ascendante.

1. Quelle hypothèse raisonnable peut-on faire sur la masse volumique du fluide mercure ?
2. Rappeler la relation de la statique des fluides et la projeter sur l'axe Oz .
3. En déduire la loi d'évolution $P(z)$ de la pression dans le mercure.

L'image historique ci-contre montre une zone de vide (*vuoto* en italien) au delà d'une certaine hauteur de mercure.

4. Pour quelle hauteur de mercure atteint-on ce « vide » ?
5. De quoi est réellement composé ce « vide » ?



RELATION BAROMÉTRIQUE

Masse volumique d'un gaz parfait

La masse volumique d'un gaz parfait, de masse molaire M , placé à la pression p et à la température T , vérifie :

$$\mu = \frac{PM}{RT}$$

où $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ est la constante universelle des gaz parfaits.

Équation barométrique

Dans une fluide compressible, modélisé comme un gaz parfait isotherme, placé dans le seul champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -g\vec{u}_z$, la pression est une fonction exponentielle décroissante de la hauteur et :

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$$

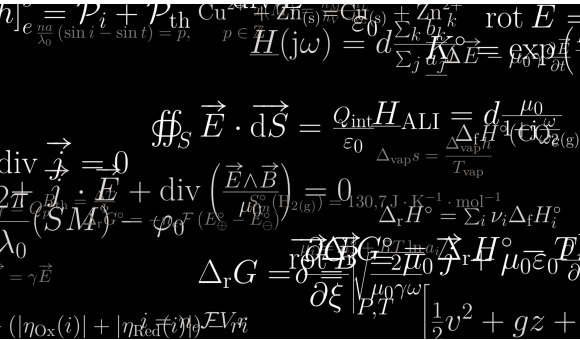
où $H = \frac{RT_0}{Mg}$ est la hauteur caractéristique d'évolution de la pression, avec M la masse molaire du gaz parfait considéré.

EXERCICE D'APPLICATION 4

La température et la pression de l'atmosphère varient en fonction du lieu de mesure et du moment où elle a été effectuée (saison, heure de la journée, ...). L'organisation internationale de normalisation (ISO pour International Organization for Standardization) a donc définie un modèle de l'atmosphère standard dite « ISA » (International Standard Atmosphere) pour permettre la calibration de certains appareils de mesure. Ce modèle se compose de diverses tables de valeurs et fonctions de référence parmi lesquelles une fonction affine de l'altitude selon laquelle, en orientant l'axe Oz selon la verticale ascendante, on a :

$$T(z) = T_0 + \alpha z$$

1. Quel modèle thermodynamique raisonnable peut-on proposer pour l'air ?
2. En déduire la loi d'évolution de la masse volumique de l'air en fonction de la pression et de diverses constantes.
3. Rappeler l'expression de la relation de la statique des fluides et en déduire l'équation différentielle vérifiée par la pression P_{adiab} .
4. En notant $P_{\text{adiab}}(z = 0) = P_0$ résoudre cette équation différentielle.
5. Par analyse dimensionnelle, en déduire l'expression d'une hauteur caractéristique H_{adiab} et la calculer.



RÉSULTANTE DES FORCES DE PRESSION

Résultante des forces de pression

On appelle *résultante des forces de pression* sur une surface Σ , la grandeur :

$$\vec{F} = \iint_{M \in \Sigma} P(M) \vec{dS}$$

où $\vec{dS} = dS \vec{n}$ est le vecteur normal à Σ en M .

[illegible]

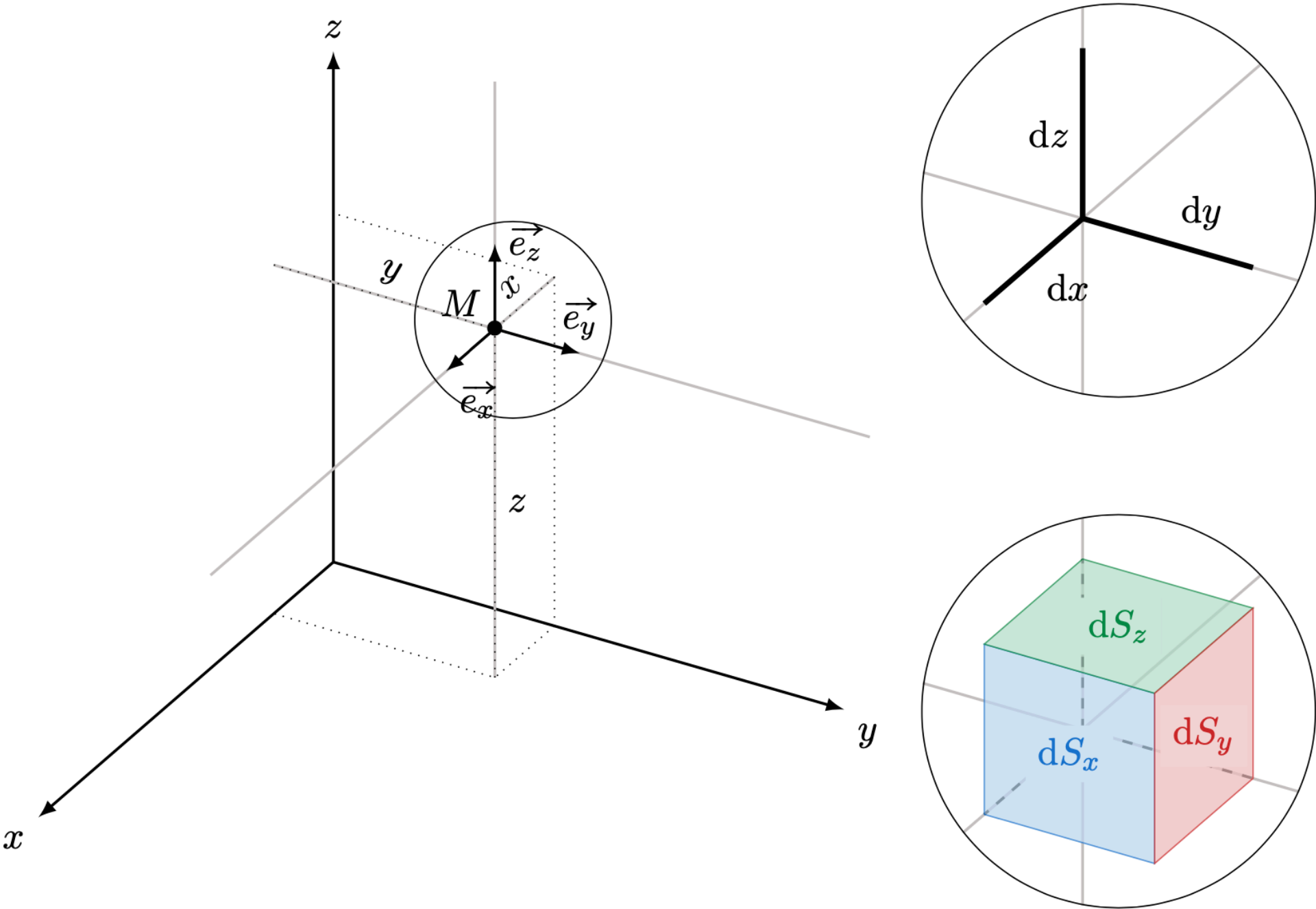
Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver clans les effets produits.

Lorsque certains effets révèlent une certaine dissymétrie, cette dissymétrie doit se retrouver dans les causes qui lui ont donné naissance.

Lorsque certains effets révèlent une certaine dissymétrie, cette dissymétrie doit se retrouver dans les causes qui lui ont donné naissance.

$$h]_{e\frac{\mu_0}{\lambda_0}(\sin i - \sin i)} = p_i + p_{th} \frac{Cu^{2+} + Zn^{2+}}{p \in \frac{H(j\omega)}{\sum_j \frac{K_j}{\omega_j}} \frac{Cu(s)}{Zn(s)} + \frac{Zn^{2+}}{Cu^{2+}} \frac{rot E}{\exp(\frac{\mu_0}{\lambda_0})} \\ \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \frac{H_{ALI}}{\Delta_{vap} s} = d \frac{\mu_0}{\Delta_{vap} s} \frac{1}{T_{vap}} \\ \text{div} \vec{E} = 0 \quad \text{div} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) = 0 \quad \Delta_r H^\circ = \sum_i \nu_i \Delta_r H_i^\circ \\ \Delta_r G = 0 \quad \frac{\partial \Delta_r G}{\partial \xi} = 0 \quad \frac{\partial \Delta_r G}{\partial T} = -\frac{\Delta_r H^\circ}{T^2} \quad \frac{\partial \Delta_r G}{\partial P} = \frac{\Delta_r V^\circ}{T} \\ -(|\eta_{Ox}(i)| + |\eta_{Red}(i)|) \frac{EV_i}{T} \quad \frac{1}{2} v^2 + gz +$$

OUTILS MATHÉMATIQUES : BASE CARTÉSIENNE



$$h]_{e^{\frac{\mu_0}{\lambda_0}}(\sin i - \sin t) = p, \quad \text{Cu}^{2+} + \text{Zn}^{2+} \rightleftharpoons \text{Cu}^{+} + \text{Zn}^{+} \quad \text{rot } E =$$

$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = d \frac{\underline{Z}_k}{\sum_j \underline{Z}_j} \underline{K} \underline{E} = \exp \left(\frac{\underline{Z}_k}{\sum_j \underline{Z}_j} \right)$$

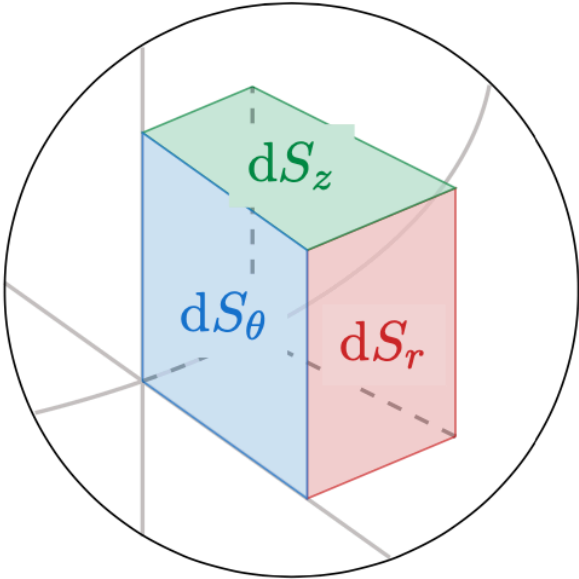
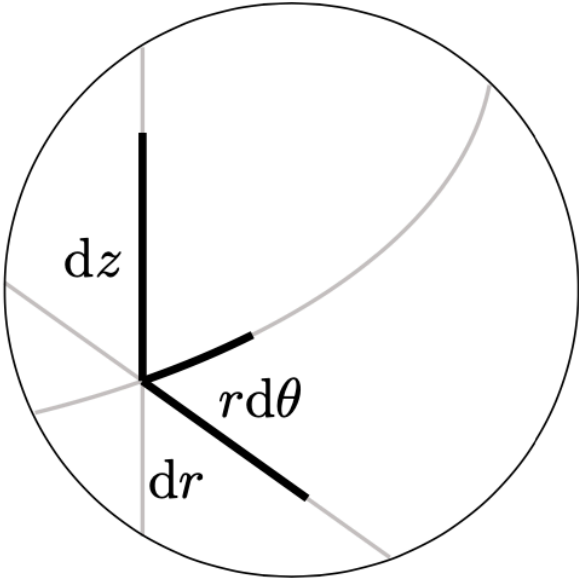
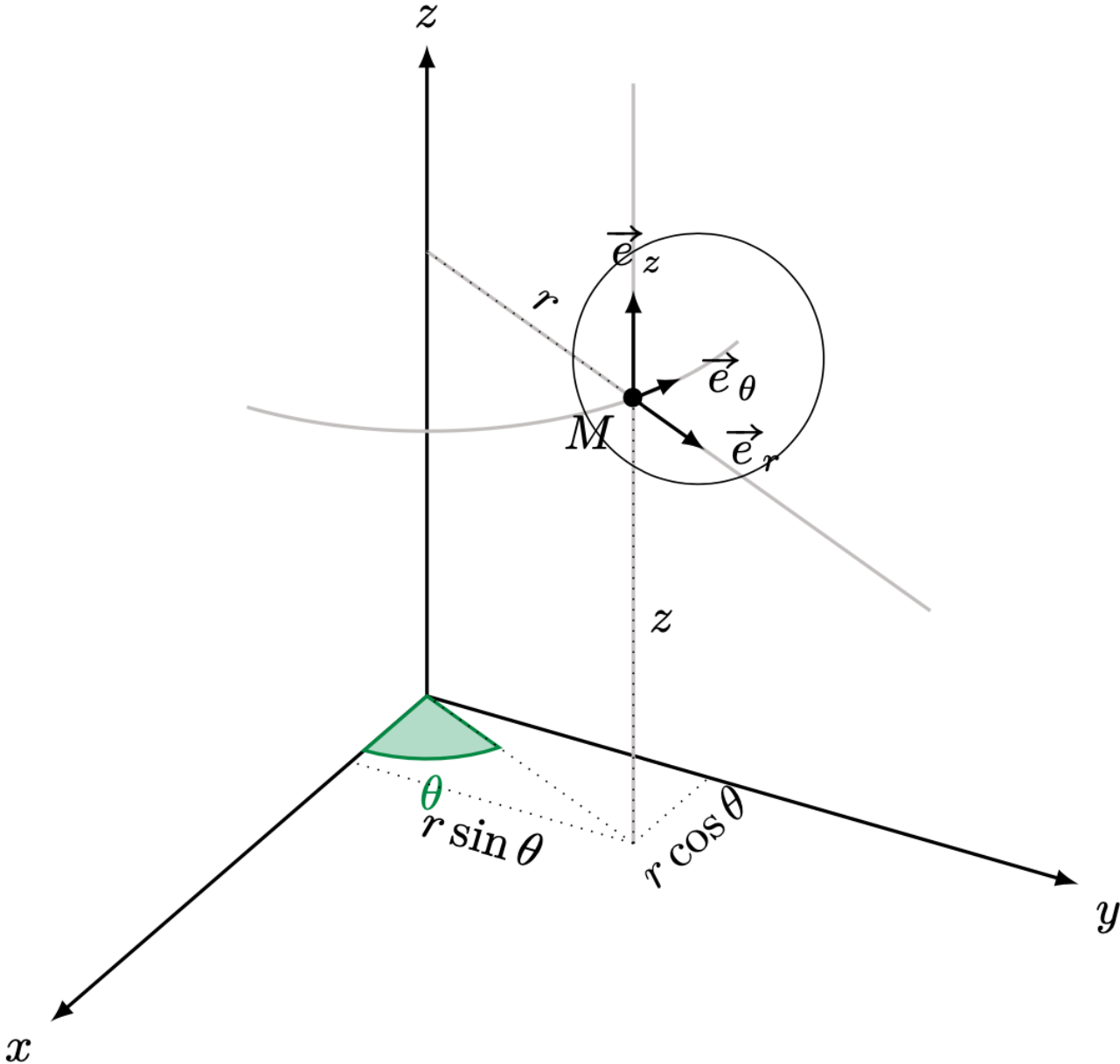
$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad H_{\text{ALI}} = d \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega}{c^2(g)}$$

$$\text{div } \vec{F} = 0 \quad 2\pi \frac{d}{d\theta} \left(\frac{d}{d\theta} \vec{E} + \text{div} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) \right) = 0 \quad 4.30.7.1 \cdot \text{mol}^{-1} \quad \Delta_r H^\circ = \sum_i \nu_i \Delta_f H_i^\circ$$

$$\frac{\lambda_0}{j} = \gamma \vec{E} \quad \Delta_r G = 0 \quad \frac{\partial \Delta_r G}{\partial \xi} = 2\mu_0 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\mu_0 \gamma \omega}{P, T} \right) \frac{1}{2} v^2 + gz +$$

$$-(|\eta_{\text{Ox}}(i)| + |\eta_{\text{Red}}(i)|) \mathcal{E} V_i \vec{n}$$

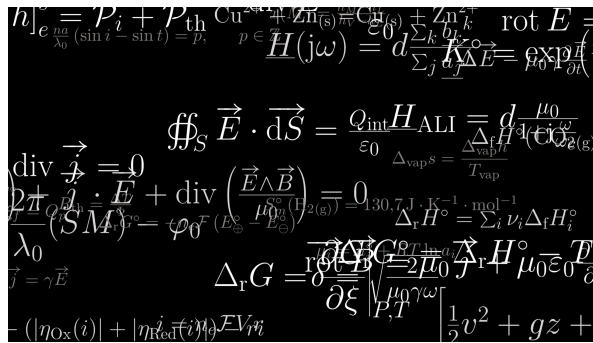
OUTILS MATHÉMATIQUES : BASE CYLINDRIQUE



EXERCICE D'APPLICATION 6

Un bol de forme hémisphérique de rayon R est complètement rempli d'un liquide de masse volumique μ et posé sur une table.

1. Par analyse des symétries du problème, donner l'expression du vecteur unitaire \vec{u} , donnant le sens de la résultante des forces de pression.
2. Établir l'évolution de la pression en fonction de la profondeur z , puis celle de la pression en un point M de la paroi du bol en fonction de θ .
3. Établir l'expression du vecteur $\vec{dS}(M)$ et en déduire l'expression de la force élémentaire δF_u , projection de $\vec{\delta F}$ sur le vecteur unitaire \vec{u} .
4. En déduire l'expression de la force de pression exercée sur le bol.



CAS PARTICULIER : POUSSÉE D'ARCHIMÈDE

Théorème du gradient

Soit un volume \mathcal{V} , délimité par la surface fermée $S(\mathcal{V})$, orientée de l'intérieur vers l'extérieur, et un champ scalaire $T : M(x, y, z) \rightarrow T(x, y, z)$, continument différentiable en tout point de l'intérieur de \mathcal{V} :

$$\oint_{S(\mathcal{V})} T d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \overrightarrow{\text{grad}} T dV \quad (2.3)$$

Poussée d'Archimède

On appelle poussée d'ARCHIMÈDE, la résultante des forces de pression exercée sur un corps de volume \mathcal{V} totalement immergé dans un fluide de masse volumique μ_f . Cette force vérifie :

$$\vec{F} = -m_f \vec{g}$$

où $m_f = \iiint_{\mathcal{V}} \mu_f dV$ est la masse du fluide déplacé.

EXERCICE D'APPLICATION 5

On considère un corps \mathcal{C} de volume V et de masse volumique μ assimilable à un objet ponctuel que l'on lance avec une vitesse initiale $\vec{v}(t = 0) = \vec{V}_0$ vers un bassin rempli d'eau situé à une distance L . L'espace est décrit à l'aide d'une base cartésienne telle que représentée en figure 6.1 et on négligera l'ensemble des frottements de \mathcal{C} dans l'air et dans l'eau.

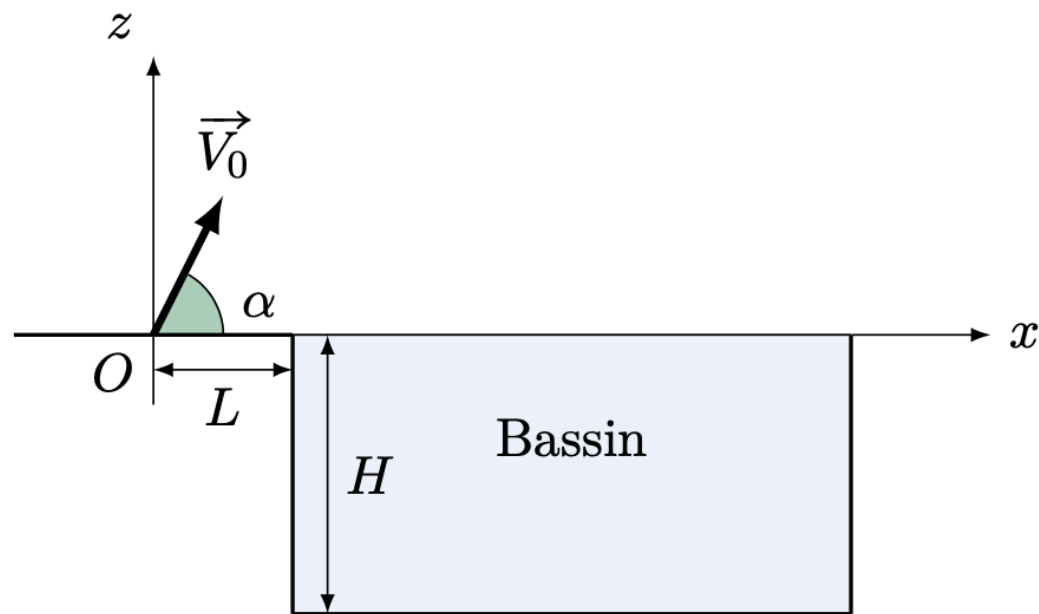


Fig. 6.1 – Bassin d'atterrissage

1. Établir une condition nécessaire sur la vitesse \vec{V}_0 pour que le corps \mathcal{C} atteigne le bassin.
2. On suppose cette condition remplie, quelle est la vitesse \vec{V}_1 avec laquelle le corps \mathcal{C} entre dans l'eau ?
3. En déduire une condition sur cette vitesse \vec{V}_1 pour que le corps \mathcal{C} ne touche pas le fond du bassin.