

---

**DM N°11**  
**Diffusion thermique**

---

Lycée LANGEVIN - WALLON

16 novembre 2020

## À lire attentivement...

Les candidats devront vérifier que le sujet comporte bien 10 pages numérotées 1/10, 2/10, ... 10/10.

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points. Les résultats numériques devront être donnés sous la forme appropriée.

Le sujet comporte :

- 2 exercices d'annale de physique.

Les diverses parties peuvent être traitées dans l'ordre choisi par le candidat. Il prendra toutefois soin de bien numérotter les questions.



**Fig. 1** – Carte mémoire de diffusion thermique

L'EMPLOI DE LA CALCULATRICE OU DE TOUTE AUTRE AIDE ÉLECTRONIQUE,  
NOTAMMENT PYTHON, EST AUTORISÉ.

LE TRAVAIL AVEC SON COURS SOUS LES YEUX EST RECOMMANDÉ.

LE PHOTO-COPILLAGE DU TRAVAIL D'UN CAMARADE SERA SANCTIONNÉ.

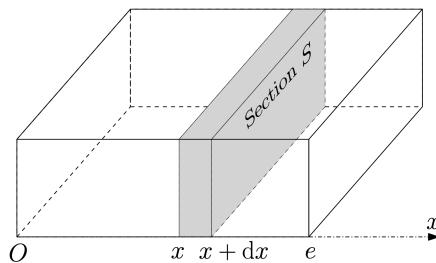
UN RÉSULTAT NON ENCADRÉ NE SERA PAS PRIS EN COMPTE.

Si au cours de la rédaction, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

## 1.1 Dimensionnement du chauffage d'une voiture de TGV

### 1.1.1 Équation de la diffusion thermique dans une paroi solide

Soit le parallélépipède représenté sur la figure 1.1. On considère le problème unidimensionnel suivant l'axe ( $Ox$ ) (toutes les grandeurs ne dépendent à priori que de  $x$ , éventuellement du temps  $t$  et sont uniformes sur toute section orthogonale à ( $Ox$ )).



**Fig. 1.1**

On suppose qu'un flux thermique traverse ce volume. L'épaisseur de la paroi (suivant ( $Ox$ )) est  $e$  et sa section  $S$ . On a également représenté une petite tranche comprise entre  $x$  et  $x+dx$ . Les notations utilisées sont :

- masse volumique du matériau  $\rho$  ;
- capacité thermique massique  $c$  ;
- conductivité thermique  $\lambda$  ;
- vecteur densité de flux thermique  $\vec{j}(x, t) = j(x, t)\vec{u}_x$  ;
- champ de température dans le parallélépipède  $T(x, t)$ .

1. Exprimer le transfert thermique  $\delta Q_{\text{in}} \text{ entrant}$  de la tranche d'épaisseur  $dx$  pendant une durée  $dt$  en fonction de  $\frac{\partial j}{\partial x}$  et des données.
2. Exprimer la variation d'énergie interne  $dU$  de cette tranche pendant cette même durée  $dt$  au cours de laquelle la température varie de  $dT$ .
3. En appliquant un résultat de la thermodynamique que l'on rappellera, en déduire une relation entre  $\frac{\partial j}{\partial x}$  et  $\frac{\partial T}{\partial t}$ .
4. Rappeler l'expression de la loi de FOURIER (dans ce cas particulier unidimensionnel). On peut déduire de ce qui précède l'équation dite de la chaleur ou de la diffusion thermique :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

5. Donner, en le justifiant à partir des résultats des questions 3 et 4, l'expression de  $D$  en fonction des données.

### 1.1.2 Régime stationnaire

Dans cette sous-partie le système est en régime stationnaire. On suppose que :

$$\begin{aligned} T(x = 0) &= T_1 \\ T(x = e) &= T_2 \end{aligned}$$

6. Déterminer l'expression de  $T(x)$ .
7. En déduire l'expression de la densité de flux thermique  $j(x)$ , ainsi que la puissance thermique  $\mathcal{P}_{\text{th}}$  traversant une section quelconque de surface  $S$  orthogonale à  $(Ox)$  et orientée dans le sens des  $x$  positifs. Que peut-on dire du champ  $\vec{j}(x)$  dans le volume étudié ?
8. Définir la résistance thermique  $R_{\text{th}}$  du volume et l'exprimer en fonction de  $\lambda$ ,  $S$  et  $e$ .

### Loi de Newton

On suppose qu'en plus des phénomènes purement diffusifs s'ajoutent des phénomènes conducto-convectifs aux interfaces paroi / fluide (air) ; pour simplifier on ne les prendra en compte qu'en  $x = e$ . La modélisation de ces phénomènes par la loi de NEWTON consiste à supposer qu'il existe une discontinuité de température entre la paroi et le fluide et un flux thermique entre les deux de sorte que

$$\vec{j}_{\text{cc}} = h(T_{2,p} - T_{2,f}) \vec{u}_x$$

où  $\vec{j}_{\text{cc}}$  est la densité de flux conducto-convectif sortant de la paroi,  $h$  le coefficient de conducto-convection de l'interface paroi / fluide,  $T_{2,p}$  la température en  $x = e$  de la paroi et  $T_{2,f}$  la température de l'air côté droit.

9. Quelle est la puissance thermique  $\mathcal{P}_{\text{cc}}$  échangée par conducto-convection à travers la surface  $S$  en  $x = e$  ?
10. En déduire l'expression de la résistance thermique  $R_{\text{cc}}$  équivalente à ajouter en série à  $R_{\text{th}}$  pour modéliser la conducto-convection en  $x = e$ .

#### 1.1.3 Chauffage d'une voiture de TGV

*Cette partie est moins guidée que le reste du sujet et fait plus appel à l'analyse des documents et à un raisonnement personnel construit. Le nombre de points attribué à cette partie tient compte de ces spécificités.*

On considère une voiture de TGV dans des conditions hivernales. La température extérieure est constante égale à  $T_{\text{ext}} = -4^{\circ}\text{C}$ . On cherche à estimer la puissance du chauffage  $\mathcal{P}_{\text{ch}}$  nécessaire pour maintenir la température intérieure constante à  $T_{\text{int}} = 20^{\circ}\text{C}$ .

On fait dans un premier temps les hypothèses suivantes :

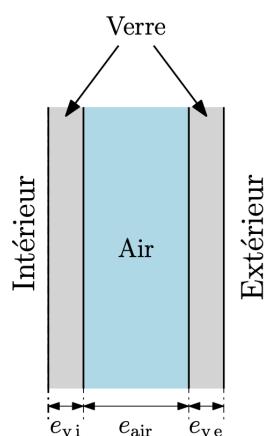
- le régime est stationnaire ;
- les vitres et le reste des parois (latérales, sol et toit) sont constituées de plusieurs couches comme schématisé figure 1.2 ;
- les vitres sont par ailleurs le siège de phénomènes conducto-convectifs côté intérieur (coefficients  $h_i$ ) et côté extérieur (coefficients  $h_e$ ) ;
- en outre, l'air intérieur est en permanence renouvelé par de l'air neuf venant de l'extérieur et ce avec un débit volumique  $D_V$  (figure 1.3). La puissance thermique nécessaire pour l'amener de la température extérieure à la température intérieure s'écrit

$$\mathcal{P}_{\text{air neuf}} = D_m c_p (T_{\text{int}} - T_{\text{ext}})$$

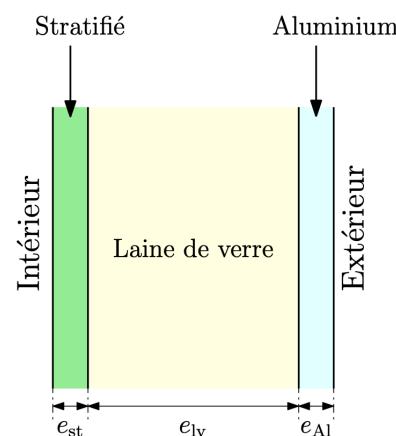
où  $D_m$  est le débit massique de renouvellement de l'air et  $c_p$  la capacité thermique massique à pression constante de l'air (notons que la masse volumique de l'air est considérée comme constante et uniforme).

Les données numériques utiles au problème sont fournies en fin d'énoncé.

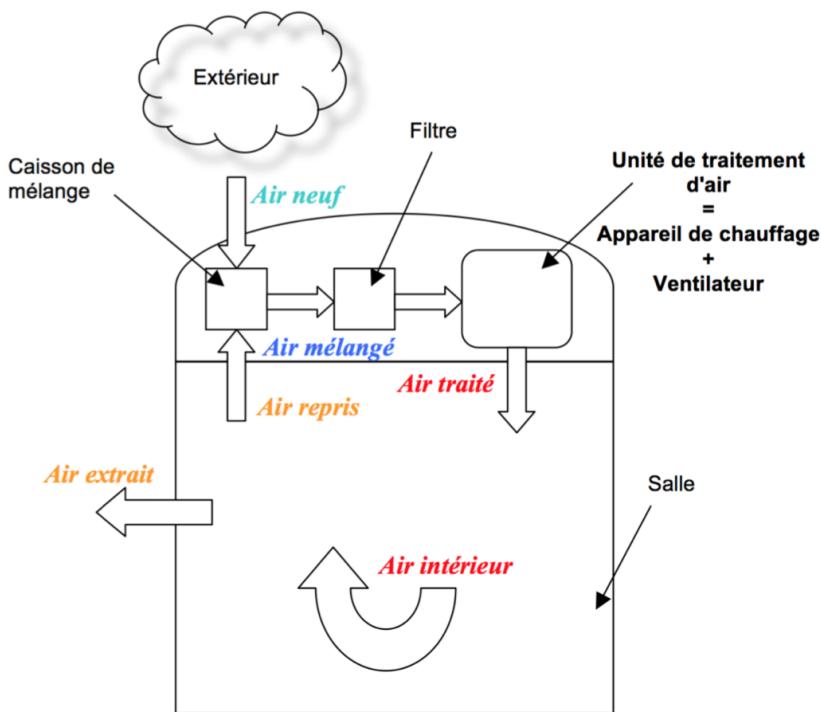
11. Pourquoi les valeurs des coefficients conducto-convectif verre / air sont-elles différentes ( $h_i$  et  $h_e$ ) pour l'extérieur et l'intérieur de la voiture ?
12. **5/2** : Justifier l'expression de l'équation de  $\mathcal{P}_{\text{air neuf}}$ .
13. On souhaite se placer dans un premier temps dans la situation la plus défavorable (celle qui nécessitera la plus grande valeur de  $\mathcal{P}_{\text{ch}}$ ). Doit-on supposer la voiture pleine de passagers ou vide (justifier) ?
14. On se place dans l'hypothèse de la question précédente. En précisant toutes les étapes du raisonnement et des calculs, estimer la valeur de la résistance thermique équivalente totale de la voiture ( $R_{\text{tot}}$ ).
15. En précisant toutes les étapes du raisonnement et des calculs, estimer la valeur de  $\mathcal{P}_{\text{ch}}$  permettant de maintenir la température intérieure constante.



(a) Constitution d'une vitre



(b) Constitution des parois

**Fig. 1.2 – Constitution des parois et des vitres****Fig. 1.3 – Circulation de l'air dans un véhicule ferroviaire et appellations selon la norme NF EN 14750-1**

## Données

*Données numériques pour le dimensionnement du chauffage d'une voiture de TGV*

Voiture	$L$ (longueur)	22500 mm
	$\ell$ (largeur)	2780 mm
	$h$ (hauteur)	2100 mm
	$e_{Al}$	4 mm
	$e_{lv}$	24 mm
	$e_{st}$	4 mm
	Nombre de places assises	50
Vitres	Nombre par voiture	12
	$L_v$ (largeur)	2000 mm
	$H_v$ (hauteur)	840 mm
	$e_{air}$	12 mm
	$e_{vi}$	4 mm
	$e_{ve}$	4 mm
Conductivités thermiques	$\lambda_{Al}$	$237 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
	$\lambda_{lv}$	$0,051 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
	$\lambda_{st}$	$1 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
	$\lambda_{air}$	$0,03 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
	$\lambda_v$	$1,15 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
Masse volumique de l'air	$\rho_{air}$	$1,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
Puissance thermique moyenne dégagée par un passager	$\mathcal{P}_{\text{pass}}$	60 W
Autres données	$h_i$	$8 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$
	$h_e$	$25 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$
	$D_V$	$2100 \text{ m}^3\cdot\text{h}^{-1}$
	$c_p$	$1000 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$

Fig. 1.4

# 2020 CCS MP Physique Chimie 1 – L'énergie électrique d'origine nucléaire

Le but de ce problème est de regarder, en tant que scientifique non expert du sujet, quelques aspects d'une centrale nucléaire de type EPR (signifiant *Evolutionary Pressurised water Reactor*), qui est un type de réacteur à eau pressurisée (REP).

Les 19 centrales nucléaires actuellement en fonctionnement en France ont été globalement construites sur le même mode. Tous leurs réacteurs utilisent la même technologie, dans laquelle de l'eau sous pression sert à transporter la chaleur produite par les réactions nucléaires. [...]

Les centrales nucléaires regroupent un total de 58 réacteurs dont 34 produisent chacun une puissance électrique de 900 MégaWatt (MW) – 900 MW permet d'alimenter près de 500 000 foyers. À cela s'ajoutent 20 réacteurs de 1300 MW, tandis que les quatre derniers délivrent 1450 MW. Un 59<sup>e</sup> réacteur est actuellement en construction à Flamanville, dans la Manche. De type EPR (*Evolutionary Pressurised water Reactor*), il développera une puissance électrique de l'ordre de 1600 MW. Actuellement, ces installations produisent près de 80 % de l'électricité produite en France.

*Autorité de Sûreté Nucléaire, informations mises à jour en février 2018*

Les trois parties du problème sont largement indépendantes, mais les données numériques fournies dans les différentes parties sont susceptibles d'être utilisées dans toutes les parties. Les applications numériques seront faites avec un nombre de chiffres significatifs adapté. Les données numériques sont fournies dans le document réponse à rendre avec la copie.

Certaines questions peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'expliquer clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

## 2.1 Le cœur du réacteur

Le principe de fonctionnement d'une centrale nucléaire est représenté figure 2.1. Le réacteur chauffe une certaine quantité d'eau qui circule, en boucle fermée, dans le circuit primaire. L'eau du circuit primaire permet de vaporiser l'eau contenue dans le circuit secondaire dont la circulation assure la rotation de turbines couplées à des alternateurs. Le circuit tertiaire est utilisé pour liquéfier l'eau du circuit secondaire en sortie des turbines, avant qu'elle ne soit à nouveau injectée dans les générateurs de vapeur.

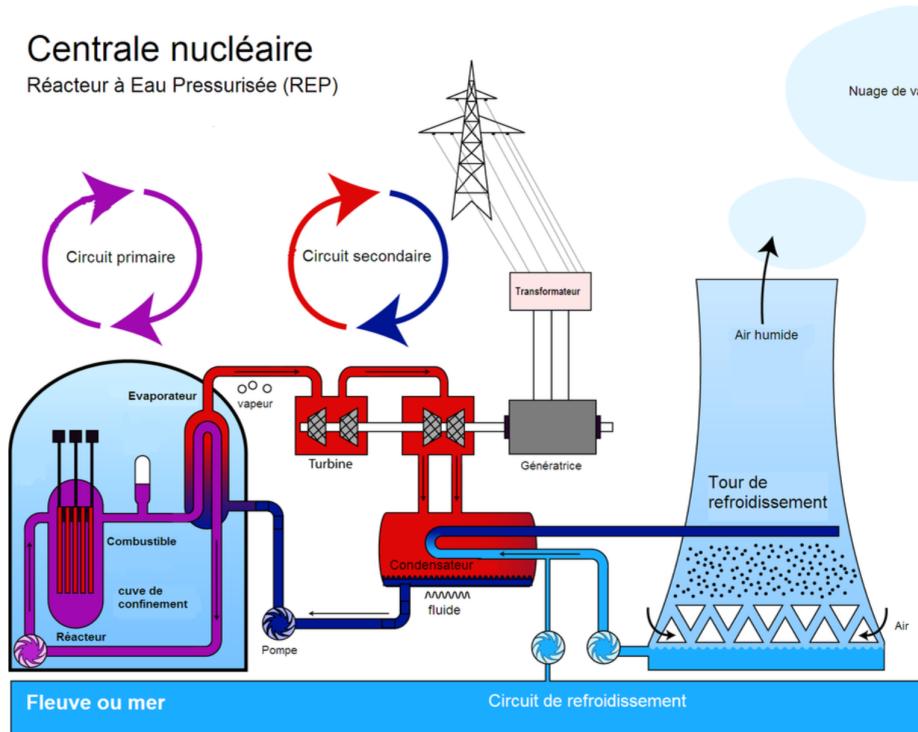


Fig. 2.1 – Principe d'une centrale nucléaire (source : Wikipedia)

Au cœur d'une tranche de centrale (qui comporte en général 2 ou 3 tranches), le combustible nucléaire est sous forme de pastilles cylindriques. Ces pastilles sont regroupées en crayons, eux-même réunis en assemblages (figure 2.2). Un assemblage contient 600 kg de dioxyde d'uranium enrichi. Un cœur de réacteur est l'association de 241 assemblages (figure 2.3).

### 2.1.1 Quelques analyses préliminaires

1. Pourquoi produire le combustible sous forme de pastilles au lieu de cylindres prêts à mettre dans la gaine du crayon ? Quel est l'intérêt de faire une multitude de petits crayons de combustibles plutôt que quelques-uns, plus gros ?
2. Un assemblage est un quadrillage de  $17 \times 17$  emplacements. Or, il ne contient que 265 crayons de combustible. À quoi peuvent servir les autres emplacements ?

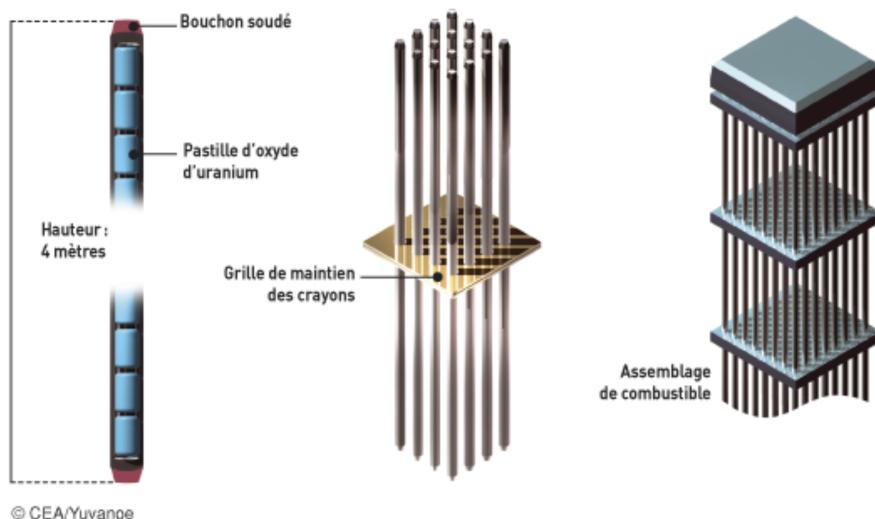
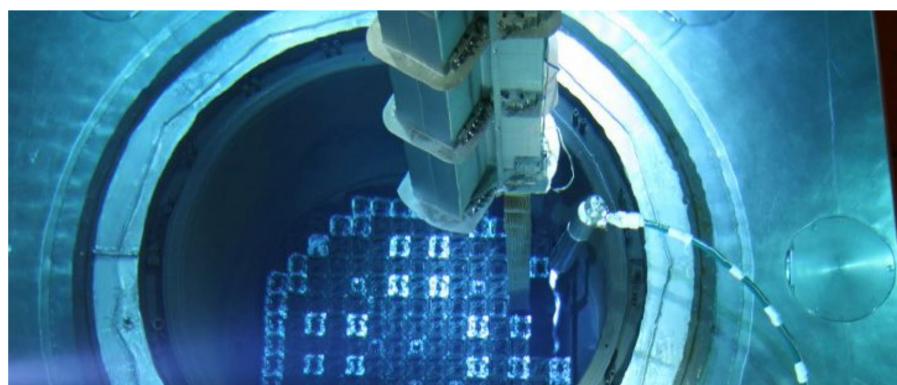


Fig. 2.2 – Assemblage du combustible au cœur d'une centrale



**Fig. 2.3 – Vue du cœur d'un réacteur**

3. Vérifier que la surface totale d'échange entre l'eau du circuit primaire et les crayons indiquée dans les données (environ  $8000 \text{ m}^2$ ) est cohérente avec la structure du cœur du réacteur.

### 2.1.2 Approche théorique

#### Modélisation

On modélise un crayon radioactif par un cylindre d'axe ( $Oz$ ) et de rayon  $R$  dans lequel les réactions nucléaires produisent une puissance volumique uniforme. Le régime est considéré stationnaire. On utilise le système de coordonnées cylindriques d'axe ( $Oz$ ) :  $(r, \theta, z)$ .

4. Justifier que la température est une fonction de  $r$  uniquement. Que peut-on en déduire sur la densité de courant thermique  $\vec{j}$  ?
5. La figure 2.4 présente quatre profils de température à l'intérieur du crayon, ainsi que les expressions analytiques de  $T(r)$  associées (pour chacune de ces expressions, la constante  $K$  est une constante positive). Parmi ces profils, quel est le seul susceptible de correspondre au crayon radioactif étudié ? Justifier votre réponse à partir d'arguments qualitatifs uniquement (sans aucun calcul).
6. En admettant que le profil identifié représente réellement le champ de température à l'intérieur du crayon, relier la constante  $K$  aux grandeurs physiques pertinentes dont les valeurs numériques sont données dans le document réponse.
7. À l'aide des caractéristiques du cœur données dans le document réponse, proposer une estimation de la puissance volumique libérée dans le combustible lorsque le réacteur est en fonctionnement nominal.
8. Proposer une définition plausible de la puissance linéique. Confirmer (ou non) cette définition par un calcul d'ordre de grandeur (une page maximum). Comment expliquer l'existence d'une puissance linéique maximale ?
9. En supposant que la température en  $r = R$  est celle de l'eau au voisinage des crayons, calculer numériquement la température au « au cœur » du crayon (en  $r = 0$ ). Commenter.

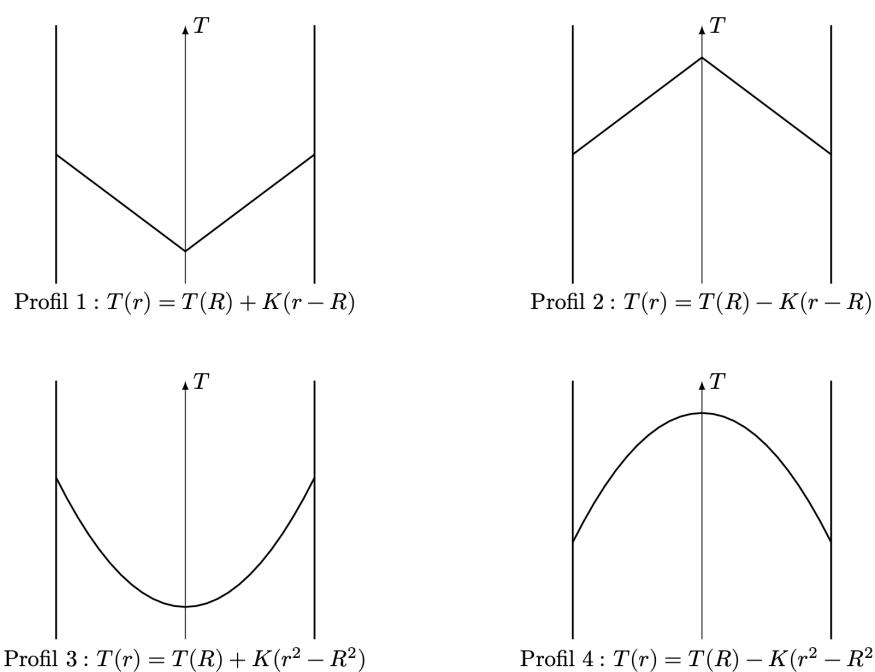


Fig. 2.4 – Vue du cœur d'un réacteur

## Amélioration du modèle

10. Pourquoi la température en  $r = R$  ne vaut-elle pas exactement la température de l'eau indiquée dans les données ?
11. À l'aide d'une démarche à préciser (une page maximum), proposer un modèle conduisant à une meilleure estimation de la température au cœur du crayon en tenant compte du constat précédent. Ne pas hésiter, pour cela, à introduire les grandeurs physiques pertinentes en proposant, le cas échéant, des ordres de grandeur raisonnables.
12. En réalité, la conductivité thermique du dioxyde d'uranium n'est pas indépendante de la température mais possède le profil donné figure 2.5. Expliquer, de manière qualitative mais argumentée, de quelle manière est modifié le profil de température et, en particulier, si on peut s'attendre à une température plus élevée ou plus basse que celle calculée précédemment.

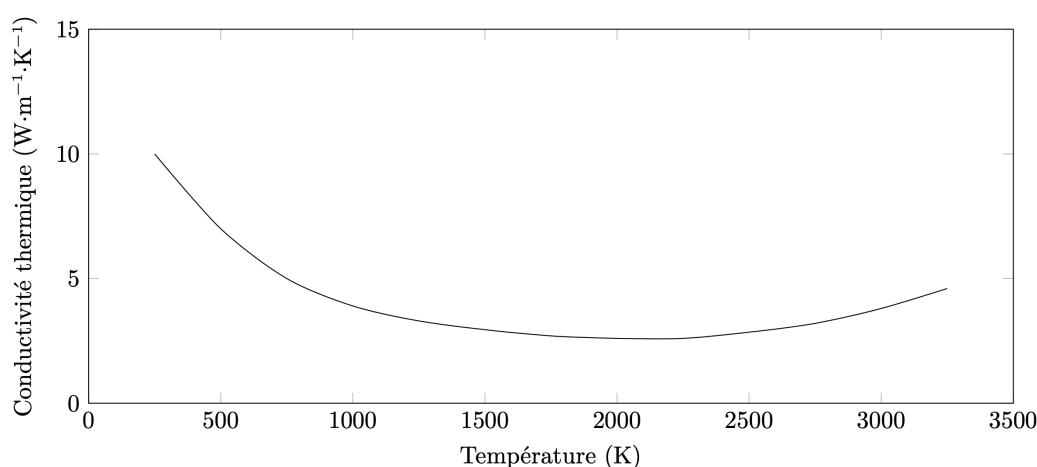


Fig. 2.5 – Vue du cœur d'un réacteur

## Données

### Formulaire – Opérateurs vectoriels en coordonnées cylindriques

Pour un champ scalaire  $f = f(r\theta, z)$  :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{grad}} f &= \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z \\ \Delta f &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{aligned}$$

Pour un champ vectoriel :  $\vec{A} = A_r(r, \theta, z) \vec{u}_r + A_\theta(r, \theta, z) \vec{u}_\theta + A_z(r, \theta, z) \vec{u}_z$  :

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial r A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

## Valeurs numériques

Sur les caractéristiques du cœur

Structure	
réseau assemblage	carré $17 \times 17$ crayons
nombre de crayons de combustible	265
diamètre d'un crayon	9,5 mm
épaisseur de la gaine d'un crayon	0,57 mm
nombre d'assemblages	241 par cœur
masse d' $\text{UO}_2$ par assemblage	600 kg
Combustible (dioxyde d'uranium)	
conductivité thermique moyenne	$5,0 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
température de fusion	2865 °C

Circuit primaire	
débit par boucle	$27,2 \times 10^3 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$
nombre de boucles	4
pression	155 bar
température à l'entrée	296 °C
température au voisinage des crayons	332 °C
température à la sortie	330 °C
surface d'échange	8000 $\text{m}^2$
densité de courant thermique en périphérie d'un crayon (fonctionnement nominal)	$157 \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$
puissance linéique (fonctionnement nominal)	$470 \text{ W} \cdot \text{cm}^{-1}$
puissance linéique maximale à ne pas dépasser	$590 \text{ W} \cdot \text{cm}^{-1}$