

---

**DM N°16**  
**Induction & oscillateurs**

---

Lycée LANGEVIN - WALLON

25 décembre 2020

## À lire attentivement...

Les candidats devront vérifier que le sujet comporte bien 7 pages numérotées 1/7, 2/7, ... 7/7.

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points. Les résultats numériques devront être donnés sous la forme appropriée.

Le sujet comporte :

- 2 exercices d'annale de physique.

Les diverses parties peuvent être traitées dans l'ordre choisi par le candidat. Il prendra toutefois soin de bien numérotter les questions.



**Fig. 1** – Carte mémoire d'électromagnétique



**Fig. 2** – Carte mémoire de Oscillateurs

L'EMPLOI DE LA CALCULATRICE OU DE TOUTE AUTRE AIDE ÉLECTRONIQUE,  
NOTAMMENT PYTHON, EST AUTORISÉ.

LE TRAVAIL AVEC SON COURS SOUS LES YEUX EST RECOMMANDÉ.

LE PHOTO-COPILLAGE DU TRAVAIL D'UN CAMARADE SERA SANCTIONNÉ.

UN RÉSULTAT NON ENCADRÉ NE SERA PAS PRIS EN COMPTE.

Si au cours de la rédaction, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

## Transmission d'énergie électrique sans fil

L'électricité de demain pourra-t-elle se passer de fils électriques ? La nécessité actuelle de supprimer les fils et réduire l'encombrement, ou encore la multiplication des appareils électriques à faible consommation contribuent au développement des techniques et dispositifs de transmission d'énergie sans fil, inspirés des travaux pionniers de NIKOLA TESLA au début du XX<sup>e</sup> siècle. Les applications sont nombreuses et touchent divers domaines (voir figure 1.1) : de l'usage domestique (recharge d'appareils avec batteries, alimentation de petits appareils courants) au monde industriel (recharge de voitures électriques, applications diverses de la transmission de puissance, pour les trains par exemple), en passant par la médecine (apport d'énergie électrique aux implants, sans effectuer d'opérations chirurgicales lourdes).

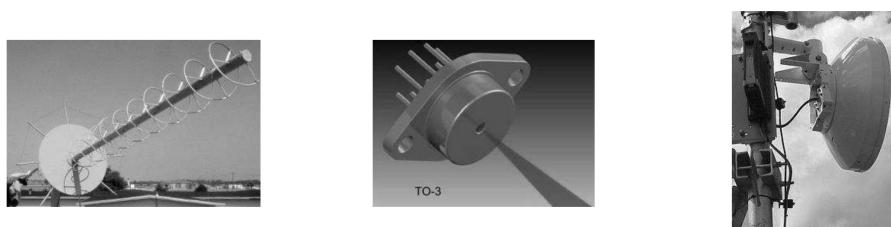


**Fig. 1.1** – Quelques applications de la transmission d'énergie sans fil, de gauche à droite : recharge de téléphone portable, recharge sans fil d'une voiture Nissan Leaf, pacemaker

Il existe aujourd'hui différents moyens de transmission de puissance sans fil. Citons notamment le couplage inductif non résonant en champ proche, le couplage inductif résonant en champ proche (voir figure 1.2) et le rayonnement en champ lointain (voir figure 1.3). Les caractéristiques, avantages et inconvénients de ces techniques sont donnés dans le tableau ci-après. Nous développerons dans cette partie certains aspects du couplage inductif, non résonant puis résonant.



**Fig. 1.2** – À gauche : couplage inductif non résonant en champ proche ; à droite : couplage inductif résonant en champ proche



**Fig. 1.3** – Quelques dispositifs de rayonnement en champ lointain, de gauche à droite : antenne à forte directivité, diode laser, antenne micro-onde

Mentionnons que le transfert de puissance sans fil par couplage résonant a été récemment mis en évidence par l'équipe de recherche dirigée par MARIN SOLJACIC, au *Massachusetts Institute of Technology* (MIT), en réalisant une transmission de puissance de 60 W avec une distance de 2 m séparant les

deux bobinages, permettant d'allumer une ampoule (voir figure 1.2). Ces travaux performants ont donné lieu à une publication dans la revue *Science* en 2007. C'est à cette occasion que le terme « *witricity* », contraction de *Wireless Electricity*, est apparu.

	Couplage non résonnant	Couplage résonant	Rayonnement
Matériel nécessaire	bobines	bobines	antenne à grande directivité
Type de champ	magnétique	magnétique	électrique
Distance de transmission	faible	faible à moyenne	moyenne à grande
Puissance transmissible	faible	moyenne	moyenne à grande
Interactions avec le milieu	faible	faible	forte
Sécurité	élevée	élevée	potentiellement dangereux

**Tab. 1.1 – Comparaison des différentes techniques**

## 1.1 Couplage inductif non résonant

### 1.1.1 Transfert de puissance : rendement de Yates

Modélisons à présent le transfert inductif de puissance entre deux bobines, comme celles représentées sur la figure 1.4.



**Fig. 1.4 –** À gauche : système de transmission classique (émetteur et récepteur) utilisé dans les chargeurs sans fil actuels. À droite : schéma et notations utilisées

Une bobine émettrice « plate », de résistance électrique  $R_1$  et d'inductance propre  $L_1$ , comportant  $N_1$  spires circulaires de rayon  $a$ , est parcourue par un courant d'intensité :

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t)$$

imposé par un générateur (non représenté sur la figure 1.4).

- Définir et exprimer la puissance instantanée reçue par la bobine émettrice de la part du générateur, notée  $\mathcal{P}_{\text{reçue}}$ , en fonction de  $L_1$ ,  $R_1$ , de l'intensité  $i(t)$  et de sa dérivée  $\frac{di}{dt}$ . En déduire la moyenne temporelle de cette puissance  $\langle \mathcal{P}_{\text{reçue}} \rangle$  en fonction de  $R_1$  et  $I_0$ .

Considérons également une bobine réceptrice « plate », de résistance électrique  $R_2$ , d'inductance propre  $L_2$  et comportant  $N_2$  spires circulaires de rayon  $b$ , située à une distance  $d$  de la bobine émettrice. On cherche à définir et exprimer le rendement de transfert de puissance entre les deux bobines, dans le cas d'un alignement parfait. On rappelle l'expression du champ magnétique créé par la bobine émettrice

en un point  $M(z)$  de l'axe  $Oz$  :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N_1 i(t) a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \vec{u}_z$$

Pour simplifier, on suppose ce champ magnétique uniforme dans le plan de la bobine réceptrice.

2. Exprimer le flux  $\Phi$  du champ magnétique créé par la bobine émettrice à travers la bobine réceptrice, en fonction de  $i(t)$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $d$ ,  $N_1$  et  $N_2$ .
3. Le courant  $i(t)$  étant variable, il apparaît une force électromotrice (fem)  $e(t)$  aux bornes de la bobine réceptrice. Quel phénomène est ainsi mis en évidence ? Donner l'équation locale de Maxwell à l'origine de celui-ci.
4. Après avoir nommé la loi utilisée, exprimer la fem  $e(t)$  en fonction de  $I_0$ ,  $\omega$ ,  $t$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $d$ ,  $N_1$  et  $N_2$ . On négligera le flux magnétique propre du circuit récepteur devant le flux extérieur.
5. En négligeant l'inductance propre  $L_2$  de la bobine réceptrice, en déduire la puissance reçue par cette dernière de la part de la bobine émettrice, notée  $\mathcal{P}_{\text{géné}}$ , puis sa moyenne temporelle  $\langle \mathcal{P}_{\text{géné}} \rangle$  en fonction de  $I_0$ ,  $\omega$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $d$ ,  $N_1$ ,  $N_2$  et  $R_2$ .

On définit le rendement de transmission de puissance par le quotient :

$$\eta = \frac{\langle \mathcal{P}_{\text{géné}} \rangle}{\langle \mathcal{P}_{\text{reçue}} \rangle}$$

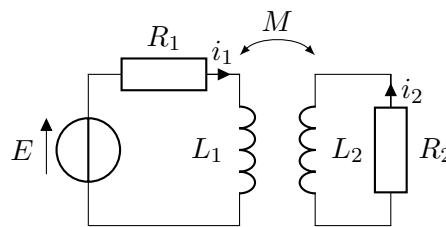
6. Montrer que le rendement peut se mettre sous la forme :

$$\eta = k \frac{\mu_0^2 N_1^2 N_2^2 a^4 b^4 \omega^2}{R_1 R_2 (d^2 + a^2)^3}$$

avec  $k$  un coefficient sans dimension à expliciter. Ce résultat constitue la loi de YATES.

### 1.1.2 Modélisation du couplage : inductance mutuelle

On propose dans cette sous-partie une modélisation plus générale du couplage magnétique, s'affranchissant des hypothèses faites dans la sous-partie précédente. Le couplage est quantifié par l'inductance mutuelle  $M$  entre les deux bobines, d'inductances propres respectives  $L_1$  et  $L_2$  (voir figure 1.5).



**Fig. 1.5 – Circuits couplés par mutuelle inductance**

7. Rappeler la définition de  $M$ , ainsi que sa dimension.
8. En appliquant la loi des mailles dans chacun des deux circuits, établir le système d'équations électriques couplées vérifiées par les intensités  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$ .
9. Montrer que ce système d'équations conduit au bilan de puissance

$$Ei_1 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + \frac{d\mathcal{E}_{\text{mag}}}{dt}$$

avec  $\mathcal{E}_{\text{mag}}$  une quantité à exprimer en fonction de  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $M$ ,  $i_1$  et  $i_2$ . Interpréter ce bilan.

10. On pose la variable adimensionnée  $x = i_1/i_2$ . Mettre  $\mathcal{E}_{\text{mag}}$  sous la forme

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} i_2^2 P(x)$$

où  $P(x)$  est un polynôme d'ordre 2 que l'on explicitera.

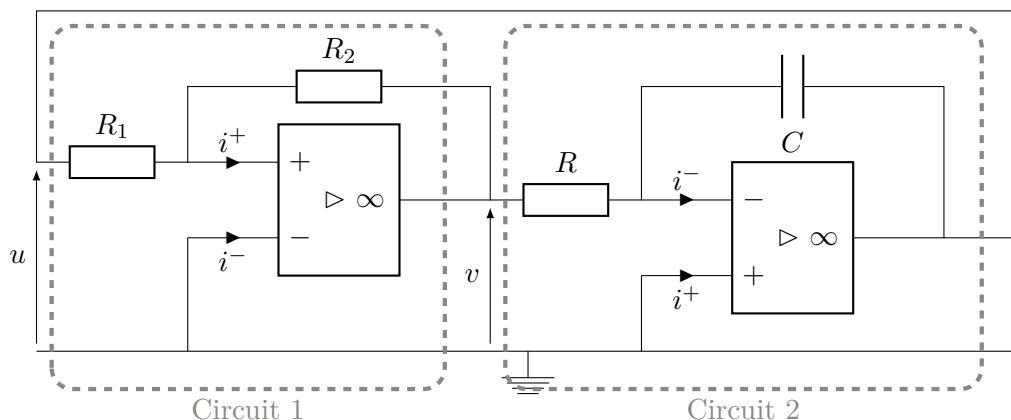
11. En admettant que  $\mathcal{E}_{\text{mag}}$  est une quantité positive, montrer que l'inductance mutuelle vérifie une inégalité de la forme  $M \leq M_{\text{max}}$ . Exprimer son majorant  $M_{\text{max}}$  en fonction de  $L_1$  et  $L_2$ .
12. Connaissez-vous d'autres applications de tels circuits couplés par mutuelle induction dans les domaines de l'industrie et de la vie courante ? Deux applications détaillées sont attendues.

## 2.1 Oscillateurs en électronique

Nous nous intéressons dans ce problème aux oscillateurs, systèmes électroniques au cœur de très nombreux objets qui nous entourent au quotidien : montre, voiture, radio, ordinateur, etc... Quelle que soit l'application, l'objectif d'un oscillateur est le même : générer un signal de période stable, de caractéristiques spectrales choisies, sans aucun signal d'entrée. Deux réalisations sont proposées dans ce problème : en première partie, un oscillateur quasi-sinusoïdal et en seconde partie un oscillateur à relaxation. Les deux parties sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.

### 2.1.1 Oscillateur à relaxation

Si l'on cherche à réaliser un signal d'horloge, il n'est pas nécessaire d'obtenir un signal sinusoïdal. On peut alors utiliser la structure de l'oscillateur à relaxation présentée en figure 2.1.



**Fig. 2.1 – Oscillateur à relaxation**

On considère les amplificateurs linéaires intégrés idéaux (ALI idéaux) et on note  $+V_{\text{sat}}$  et  $-V_{\text{sat}}$  leurs tensions de saturation. À  $t = 0$ , on suppose que la tension  $v$  vaut  $+V_{\text{sat}}$  et que la tension  $u$  est nulle.

On s'intéresse tout d'abord au circuit 1.

13. Préciser, en le justifiant, le mode de fonctionnement de l'ALI idéal. Quelles sont les valeurs que peut prendre la sortie  $v$  ?  
Pour quelle valeur de la tension d'entrée  $u$ , notée  $u_{\text{seuil}1}$ , la tension de sortie  $v$  bascule-t-elle de  $+V_{\text{sat}}$  à  $-V_{\text{sat}}$  ?

On admet que la tension de sortie  $v$  bascule de  $-V_{\text{sat}}$  et  $+V_{\text{sat}}$  pour une valeur de tension  $u_{\text{seuil}2}$  telle que  $u_{\text{seuil}2} = -u_{\text{seuil}1}$ .

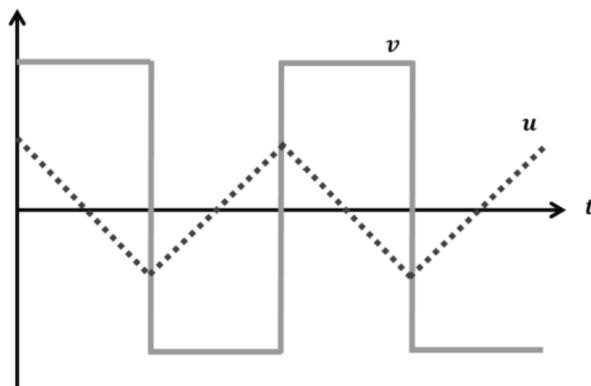
14. Tracer la tension  $v$  en fonction de la tension  $u$  en annotant soigneusement le tracé.

Le circuit 2 est un montage intégrateur inverseur. On admet la relation entrée-sortie suivante :

$$\frac{du}{dt} = -\frac{v}{RC}$$

15. Si la tension  $v$  est constante et vaut  $+V_{\text{sat}}$ , quelle est l'allure du signal d'entrée  $u$  ?

Étudions à présent le montage complet. Les chronogrammes des tensions  $u$  et  $v$  sont donnés en figure 2.2.



**Fig. 2.2 – Allures temporelles des signaux issus de l'oscillateur à relaxation**

16. Exprimer la fréquence  $f$  de la tension  $u$  en fonction de  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R$  et  $C$ .

On souhaite obtenir un signal triangulaire d'amplitude  $V_{\text{max}} = 2 \text{ V}$  et de fréquence  $f = 1 \text{ kHz}$ . On alimente les ALI en  $\pm 15 \text{ V}$ , ainsi  $V_{\text{sat}} = 15 \text{ V}$ . On impose d'utiliser les résistances  $R$  et  $R_2$  telles que  $R = R_2 = 1000 \Omega$ .

17. Déterminer les valeurs de la résistance  $R_1$  et du condensateur  $C$  pour répondre au cahier des charges.  
 18. Quelle caractéristique de l'ALI peut limiter la fréquence de fonctionnement d'un tel montage ?