DM N°18
Champ gravitationnel & mécanique des forces centrales

Lycée Langevin - Wallon

16 janvier 2021

À lire attentivement...

Les candidats devront vérifier que le sujet comporte bien 3 pages numérotées 1/3, 2/3, ... 3/3.

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points. Les résultats numériques devront être donnés sous la forme appropriée.

Le sujet comporte :
- 1 exercice d'annale de physique.

Les diverses parties peuvent être traitées dans l'ordre choisi par le candidat. Il prendra toutefois soin de bien numéroter les questions.

Fig. 1 – Carte mémoire d'électromagnétique

L'EMPLOI DE LA CALCULATRICE OU DE TOUTE AUTRE AIDE ÉLECTRONIQUE, NOTAMMENT PYTHON, EST AUTORISÉ.
LE TRAVAIL AVEC SON COURS SOUS LES YEUX EST RECOMMANDÉ.
LE PHOTO-COPILLAGE DU TRAVAIL D'UN CAMARADE SERA SANCTIONNÉ.
UN RÉSULTAT NON ENCADRÉ NE SERA PAS PRIS EN COMPTE.

Si au cours de la rédaction, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

1 2020 Banque PT A Physique

Constantes universelles

- Constante de la gravitation : $\mathcal{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$;
- Constante de Planck : $h = 6{,}62 \times 10^{-34}\,\mathrm{J} \cdot \mathrm{s}$;
- Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3{,}0 \times 10^{8}\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$;
- Permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F} \cdot \mathrm{m}^{-1}$;
- Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H} \cdot \mathrm{m}^{-1} \simeq 1{,}26 \times 10^{-6}\,\mathrm{H} \cdot \mathrm{m}^{-1}$.

Les calculs se feront avec un chiffre significatif.

Une onde gravitationnelle est une oscillation de la courbure de l'espace-temps qui se propage à grande distance de son point de formation. Albert Einstein a prédit l'existence de telles ondes en 1916 : selon sa théorie de la relativité générale, de même que les ondes électromagnétiques (lumière, ondes radio, rayons X, etc.) sont produites par les particules chargées accélérées, les ondes gravitationnelles sont produites par des masses accélérées et ces ondes se propagent à la vitesse de la lumière dans le vide. Cependant, ce n'est qu'en 2016 que la confirmation directe des ondes gravitationnelles a été possible grâce à une première observation faite le 14 septembre 2015. Cette observation ouvre un champ nouveau d'observation de l'univers à grande échelle. Depuis, plusieurs autres observations directes d'onde gravitationnelles résultant de la coalescence de deux astres ont été réalisées. Elles n'ont été possibles que grâce aux détecteurs interférométriques qui permettent de détecter un déplacement minimal de $\pm 2 \times 10^{-18}\,\mathrm{m}$. Nous nous proposons dans ce sujet de modéliser les évènements astronomiques à l'origine de ces ondes, d'étudier comment leur détection a été possible et d'évaluer la sensibilité de l'interféromètre en prenant en compte les limitations imposées par différents processus physiques.

Les trois parties sont indépendantes.

1.1 Partie 1

On se propose de dégager certaines caractéristiques des ondes gravitationnelles produites lors de la fusion de deux corps en interaction gravitationnelle. Les corps envisagés sont des trous noirs ou deux étoiles à neutrons. Bien que leur description relève de la relativité générale, on se contente, dans ce sujet, d'une approche gravitationnelle newtonienne sur laquelle greffera certains résultats de la relativité générale pour rendre compte de manière approchée des faits expérimentaux.

1.1.1 Préliminaires

1. Soient deux charges ponctuelles q_1 et q_2 disposées respectivement aux points P_1 et P_2. Rappeler l'expression de la force que q_1 exerce sur q_2. On introduira toutes les notations nécessaires.
2. Énoncer le théorème de Gauss de l'électrostatique.
3. On considère maintenant deux masses ponctuelles m_1 et m_2 en P_1 et P_2. Exprimer la force de m_1 sur m_2.
4. Établir une correspondance explicite entre l'électrostatique et la gravitation. Énoncer le théorème de Gauss gravitationnel. On notera $\vec{g}(M)$ le champ gravitationnel au point M.
5. On envisage un astre sphérique de centre O, de rayon R et de masse m uniformément répartie. En

justifiant clairement chaque étape du raisonnement, établir que le champ gravitationnel créé par cet astre en un point M extérieur à l'astre s'écrit

$$\vec{g}(M) = -\frac{\mathcal{G}m}{OM^3}\overrightarrow{OM}$$

Commenter cette expression.

6. Établir également l'expression de $\vec{g}(M)$ pour un point intérieur à l'astre.
7. Tracer alors l'allure de $\|\vec{g}(M\|$ en fonction de r pour tout r.

1.1.2 Description mécanique du système

On envisage deux corps identiques C_1 et C_2 de masse m, assimilables en première approximation à des points matériels. L'ensemble forme un système isolé. On note C leur centre de masse (ou centre d'inertie). On travaille dans un référentiel galiléen de centre C.

On note $\vec{R}_1 = \overrightarrow{CC_1}$ (de norme R_1), $\vec{R}_2 = \overrightarrow{CC_2}$ (de norme R_2), et $\vec{r} = \overrightarrow{C_1C_2}$ (de norme r). On désigne par $\vec{u}_r$ le vecteur unitaire $\vec{u}_r = \frac{\vec{R}_1}{R_1}$.

8. À partir de la définition de C, montrer que $\vec{R}_1 = -\frac{1}{2}\vec{r}$.
9. Justifier que le mouvement de C_1 est plan.

On se place dans toute cette partie dans le cas où r est une constante.

10. En déduire que le mouvement de C_1 est uniforme.
11. Décrire le mouvement de C_1. Faire un schéma où sont représentés, à un instant donné, C, C_1 et C_2 ainsi que leurs vecteurs vitesses respectifs.
12. Le mouvement de C_1 est périodique de fréquence f. Établir la relation :

$$f = \sqrt{\frac{\mathcal{G}m}{2\pi^2 r^3}}$$

13. Exprimer l'énergie potentielle gravitationnelle $\mathcal{E}_{\text{pot}}$ de C_2 dans le champ gravitationnel créé par C_1 en fonction de $\mathcal{G}$, m et r. On choisira $\mathcal{E}_{\text{pot}}$ nulle pour r tendant vers l'infini.

L'énergie mécanique totale $\mathcal{E}_m$ du système$\{C_1 + C_2\}$ s'obtient en sommant les énergies cinétiques des deux corps et l'énergie potentielle précédente.

14. Par une méthode de votre choix, montrer que l'énergie cinétique de C_1 peut s'écrire :

$$\mathcal{E}_{C_1} = \frac{\mathcal{G}m^2}{4r}$$

15. En déduire une expression de $\mathcal{E}_m$ en fonction de $\mathcal{G}$, m et r seuls. Cette énergie mécanique est une constante du mouvement : expliquer pourquoi.
16. En déduire que l'on a :

$$\mathcal{E}_m = -\alpha f^{2/3}$$

où $\alpha = \left(\frac{\pi\mathcal{G}}{2}\right)^{2/3} m^{5/3}$. Vérifier explicitement l'homogénéité de l'expression précédente.