

---

**DM N°23**

**Onde électromagnétiques**

---

Lycée LANGEVIN - WALLON

15 mars 2021

## À lire attentivement...

Les candidats devront vérifier que le sujet comporte bien 4 pages numérotées 1/4, 2/4, ... 4/4.

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points. Les résultats numériques devront être donnés sous la forme appropriée.

Le sujet comporte :

- 2 exercices d'annale de physique.

Les diverses parties peuvent être traitées dans l'ordre choisi par le candidat. Il prendra toutefois soin de bien numérotter les questions.



**Fig. 1** – Carte mémoire d'électromagnétique

L'EMPLOI DE LA CALCULATRICE OU DE TOUTE AUTRE AIDE ÉLECTRONIQUE,  
NOTAMMENT PYTHON, EST AUTORISÉ.

LE TRAVAIL AVEC SON COURS SOUS LES YEUX EST RECOMMANDÉ.

LE PHOTO-COPILLAGE DU TRAVAIL D'UN CAMARADE SERA SANCTIONNÉ.

UN RÉSULTAT NON ENCADRÉ NE SERA PAS PRIS EN COMPTE.

Si au cours de la rédaction, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

## Rappel sur la notation complexe

Dans tout le sujet, on associe à une grandeur sinusoïdale  $V(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi)$  la grandeur complexe  $\underline{V}(t) = \underline{V}_0 e^{j\phi}$  (où  $j^2 = -1$ ) et telle que  $V(t) = \text{Re}(\underline{V}(t))$ , où  $\text{Re}$  est la partie réelle.

## Données

- masse d'un proton  $\text{H}^+$  :  $m_p = 1,7 \times 10^{-27} \text{ kg}$  ;
- masse d'un électron  $\text{e}^-$  :  $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$  ;
- charge élémentaire :  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$  ;
- vitesse de la lumière dans le vide :  $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  ;
- permittivité du vide :  $\epsilon_0 = 8,9 \times 10^{-12} \text{ F/perm}$  ;
- perméabilité du vide :  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ .

Ce problème s'intéresse à l'acheminement de l'énergie électrique produite par une centrale photovoltaïque.

### 1.1 Transport de l'énergie électrique de la centrale au consommateur

L'énergie produite par une centrale photovoltaïque est dans certains cas directement injectée dans le réseau électrique basse tension pour pouvoir être consommée localement. Dans toute cette partie, on s'intéresse au transport électrique monophasé de cette énergie, c'est-à-dire utilisant deux câbles électriques, principalement employé pour alimenter les zones peu denses en habitations.

Pour des raisons historiques et techniques, le réseau électrique basse tension fonctionne avec des tensions alternatives. En France, la fréquence utilisée vaut  $f_r = 50 \text{ Hz}$  tandis que la tension efficace sur le réseau considéré est  $U_r = 230 \text{ V}$ .

Dans la partie 1.1.1 on examine le dimensionnement des câbles utilisés pour le transport de l'énergie sur le réseau.

#### 1.1.1 Dimensionnement des câbles

On s'intéresse dans cette partie à la dimension des câbles employés pour transporter l'énergie électrique de la centrale au consommateur. On cherche à justifier le rayon  $r_c$  des câbles utilisés en début du réseau basse tension.

Pour cela, on adopte le modèle de DRUDE : un électron libre de charge  $-e$  est soumis à la force qu'exerce un champ électromagnétique et à une force de frottement visqueux, modélisant les collisions, de la forme  $\vec{f} = -\frac{m_e}{\tau} \vec{v}$  avec  $m_e$  la masse d'un électron,  $\tau$  un temps de relaxation et  $\vec{v}$  la vitesse des électrons.

Un fil infini d'axe  $Oz$  et de rayon  $r_c$  est parcouru par un vecteur densité de courant  $\vec{j}_c$ . Le milieu, supposé électriquement neutre, contient  $n_0$  électrons mobiles par unité de volume. Il est suffisamment dilué pour pouvoir négliger les interactions entre les différentes charges du milieu.

On utilise les coordonnées cylindrique de base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ . On considère un champ électromagnétique monochromatique de la forme  $\vec{E}(r, t) = \underline{E}_0(r) \exp(j\omega t) \vec{u}_z$  pour le champ électrique et  $\vec{B}(r, t) = \underline{B}_0(r) \exp(j\omega t) \vec{u}_\theta$  pour le champ magnétique.

Le mouvement d'un électron du milieu conducteur est non relativiste et il est étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

- Dans le modèle présenté ci-dessus, appliquer la deuxième loi de NEWTON à un électron du milieu et donner l'équation différentielle vérifiée par sa vitesse  $\vec{v}$ . Faut-il prendre en compte le poids de l'électron ? Justifier.
- On note  $\mu_0$  la perméabilité du vide et  $\varepsilon_0$  la permittivité du vide. Écrire pour le milieu considéré les quatre équations de MAXWELL.
- Justifier que la force magnétique subie par un électron est négligeable devant la force électrique. Simplifier alors l'équation du mouvement d'un électron.

On se place en régime permanent sinusoïdal et on note  $\vec{v}$  la vitesse de l'électron dans ce régime.

- Exprimer  $\vec{v}$  en fonction de  $e$ ,  $\vec{E}_0$ ,  $\tau$ ,  $m_e$  et  $\omega$ . En déduire l'expression du vecteur densité de courant  $\vec{j}_c$  en fonction des mêmes variables et de  $n_0$ .
- Rappeler l'expression de la loi d'OHM locale en fonction de  $\vec{j}_c$ ,  $\vec{E}$  et de la conductivité électrique  $\gamma$ . En déduire que la conductivité complexe  $\underline{\gamma}$  en régime permanent sinusoïdal s'exprime :

$$\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 + j\tau\omega}$$

et donner l'expression de  $\gamma_0$  en fonction de  $n_0$ ,  $e$ ,  $\tau$  et  $m_e$ .

Un milieu conducteur tel que le câble étudié est caractérisé par un temps de relaxation de l'ordre de  $\tau \simeq 1 \times 10^{-14}$  s et une densité de porteurs de charge de l'ordre de  $n_0 \simeq 1 \times 10^{29}$  m<sup>-3</sup>. On rappelle que la fréquence du signal considéré est  $f_r = 50$  Hz.

- Calculer  $\gamma_0$ . Par des calculs d'ordre de grandeurs, simplifier l'expression de la conductivité  $\gamma$  ainsi que l'équation de MAXWELL-AMPÈRE.

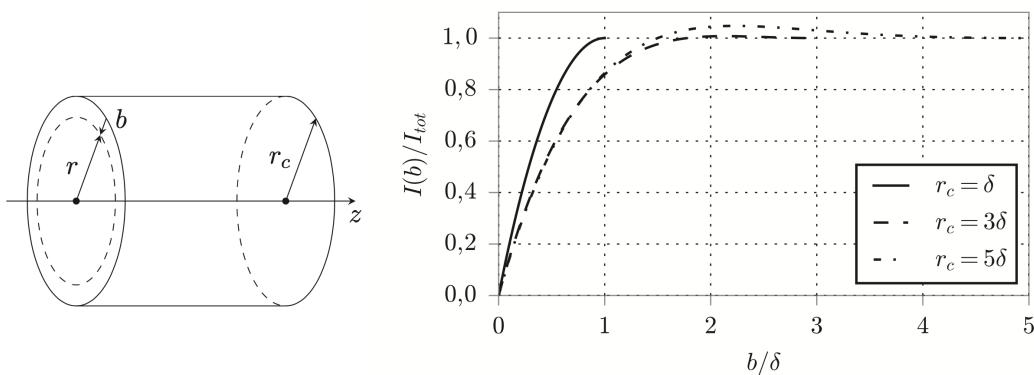
On rappelle que pour un champ vectoriel  $\vec{f}$ , on a la relation  $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{f}) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{f}) - \Delta \vec{f}$  avec  $\Delta$  le laplacien vectoriel.

- Déduire des équations de MAXWELL et de la loi d'OHM locale que le vecteur densité de courant  $\vec{j}_c(r)$  vérifie :

$$\Delta \vec{j}_c = \left( \frac{1 + j}{\delta} \right)^2 \vec{j}_c$$

Déterminer l'expression de  $\delta$  et le calculer numériquement dans le cas étudié. Quel nom donne-t-on couramment à  $\delta$  ?

La résolution de cette équation n'est pas demandée. La solution de l'équation précédente en coordonnées cylindriques conduit à un vecteur de la forme  $\vec{j}_c = j_c(r) \vec{u}_z$  avec une certaine expression pour  $j_c(r)$ .



**Fig. 1.1** – À gauche : Représentation de l'épaisseur externe  $b$ . À droite : Représentation de  $I(b)/I_{\text{tot}}$  pour les trois valeurs  $r_c = \delta$ ,  $r_c = 3\delta$  et  $r_c = 5\delta$

On représente alors sur la figure 1.1 l'intensité normalisée  $\frac{I(b)}{I_{\text{tot}}}$  avec  $I(b) = \left| \int_{r_c-b}^{r_c} 2\pi j_c(r) r dr \right|$ , l'intensité circulant dans l'épaisseur  $b$  la plus externe du conducteur et  $I_{\text{tot}} = \left| \int_0^{r_c} 2\pi j_c(r) r dr \right|$  l'intensité totale.

8. En étudiant les courbes représentatives de  $I(b)/I_{\text{tot}}$  pour différents rayons, quelle est la zone du câble la plus sollicitée pour transporter le courant ? Est-il utile de fabriquer des câbles dont le rayon vaut plusieurs fois  $\delta$  ? Justifier.
9. Au début du réseau basse tension, la section des câbles est  $s = 240 \text{ mm}^2$ . Commenter.
10. En pratique, pour faire circuler des courants intenses, on utilise plusieurs fils de faible rayon isolés les uns des autres, plutôt qu'un seul fil de gros rayon. Justifier ce choix.
11. Proposer une explication permettant à  $I(b)/I_{\text{tot}}$  d'être supérieur à 1 pour certaines valeurs de  $b$ , comme cela peut s'observer sur la figure 1.1 dans le cas où  $r_c = 5\delta$ .