

---

**DM N°5**  
**Mécanique & Statique des fluides**

---

Lycée LANGEVIN - WALLON

29 septembre 2020

## À lire attentivement...

Les candidats devront vérifier que le sujet comporte bien 9 pages numérotées 1/9, 2/9, ... 9/9.

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points. Les résultats numériques devront être donnés sous la forme appropriée.

Le sujet comporte :

- 3 exercices d'annale de physique.

Les diverses parties peuvent être traitées dans l'ordre choisi par le candidat. Il prendra toutefois soin de bien numérotter les questions.



**Fig. 1** – Carte mémoire de statique des fluides



**Fig. 2** – Carte mémoire de mécanique

L'EMPLOI DE LA CALCULATRICE OU DE TOUTE AUTRE AIDE ÉLECTRONIQUE,  
NOTAMMENT PYTHON, EST AUTORISÉ.  
LE TRAVAIL AVEC SON COURS SOUS LES YEUX EST RECOMMANDÉ.  
LE PHOTO-COPILLAGE DU TRAVAIL D'UN CAMARADE SERA SANCTIONNÉ.  
UN RÉSULTAT NON ENCADRÉ NE SERA PAS PRIS EN COMPTE.

Si au cours de la rédaction, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Aller sur Mars est sans nul doute l'un des plus vieux rêves de l'humanité, symbole de la conquête spatiale commencée en 1957 avec le premier vol spatial orbital Spoutnik 1. L'Homme n'a pas encore foulé le régolithe (sol martien) de la planète rouge, mais atteindre Mars est loin d'être une sinécure. En outre, la planète rouge se révèle peu hospitalière (présence de puissants oxydants rendant la vie sur la surface impossible, pression atmosphérique évanescante, température de surface plus basse que sur le continent Antarctique, ...).



**Fig. 1.1 – Vue d'artiste du robot Curiosity sur Mars. NASA/JPL Caltech**

Ce sujet s'intéresse, dans une première partie, aux perchlorates composant le régolithe, puissants oxydants découverts en 2008 par la NASA. On se propose ensuite de déterminer, via des modèles simples, certaines caractéristiques physiques de Mars (pression atmosphérique, épaisseur de l'atmosphère, champ de pesanteur). La troisième partie traite du projet d'avion solaire autonome Sky-Sailor qui ambitionne de cartographier la surface de Mars. Enfin, la dernière partie est dédiée à l'étude d'un modèle de formation de la calotte polaire boréale lors de l'hiver martien. Les quatre parties sont, dans une large mesure, indépendantes. Un ensemble de valeurs numériques est proposé en fin d'énoncé.

Certaines questions, repérées par une barre en marge, ne sont pas guidées et demandent de l'initiative de la part du candidat. Les pistes de recherche doivent être consignées par le candidat sur sa copie ; si elles sont pertinentes, elles seront valorisées. Le barème tient compte du temps nécessaire pour explorer ces pistes et élaborer un raisonnement, il valorise ces questions de façon très significative.

## 1.1 Quelques caractéristiques physiques de Mars

### 1.1.1 Atmosphère martienne

L'atmosphère martienne est essentiellement constituée d'un mélange gazeux de dioxyde de carbone, d'argon et de diazote. On assimile ces constituants à un gaz parfait unique de masse molaire  $M = 43,3 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ , à la pression  $P$  et à la température  $T$ . Dans cette sous-partie 1.1.1, le champ de pesanteur est supposé uniforme, de valeur égale à sa valeur au sol ( $z = 0$ ) :  $g_0 = 3,71 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

### Généralités

1. Rappeler l'équation des gaz parfaits. On donnera l'unité de chacune des grandeurs qui interviennent dans cette équation.
2. Notons  $\rho$  la masse volumique d'un gaz parfait. Exprimer  $\rho$  en fonction de  $P$ ,  $T$ ,  $M$  et  $R$  (constante des gaz parfaits).

### Modèle de l'atmosphère isotherme

On se place dans le cadre du modèle de l'atmosphère isotherme à la température  $T = T_0 = 210\text{ K}$  ( $T_0$  est la température de surface moyenne martienne). On considère une petite colonne de gaz parfait à l'équilibre mécanique, de sections égales  $s$  comprises entre les altitudes  $z$  et  $z + dz$ . L'axe vertical est pris ascendant (figure 1.2).

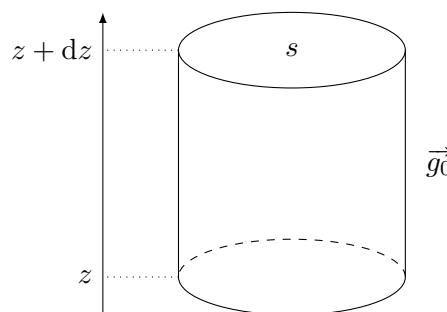


Fig. 1.2 – Petite colonne de gaz à l'équilibre mécanique

3. Montrer que la pression atmosphérique  $P$  ne dépend que de  $z$  et l'exprimer en fonction de  $P_0$  (la pression atmosphérique martienne au sol),  $g_0$ ,  $M$ ,  $z$ ,  $R$  et  $T_0$ .
4. Au fond du bassin d'*Hellas Planitia* (altitude  $z_1 = -9,5 \times 10^3\text{ m}$ ), point le plus bas de la planète, la pression atmosphérique vaut  $P_1 = 1,15 \times 10^3\text{ Pa}$ . Calculer la valeur de la pression  $P_0$  et la comparer à la valeur de la pression atmosphérique terrestre au niveau du sol (qu'on prendra égale à la pression standard  $P^\circ$ ).
5. En déduire l'expression littérale de la masse volumique  $\rho$  de l'atmosphère martienne en fonction de  $P_0$ ,  $g_0$ ,  $M$ ,  $z$ ,  $R$  et  $T_0$ . On notera  $\rho_0$  la masse volumique au sol ( $z = 0$ ), grandeur à exprimer en fonction de  $P_0$ ,  $M$ ,  $R$  et  $T_0$ . Calculer numériquement  $\rho_0$ .

Dans la suite de cette partie 1.1, nous prendrons une valeur de  $P_0$  égale à  $8,0 \times 10^2\text{ Pa}$ .

6. Comparer cette valeur à celle calculée à la question 4. Quelle(s) hypothèse(s) du modèle pourrait-on remettre en cause pour expliquer l'écart entre les valeurs mesurée et calculée de  $P_0$  ?

### Épaisseur de l'atmosphère martienne dans le modèle de l'atmosphère isotherme

L'épaisseur de l'atmosphère  $H$  est définie comme l'altitude pour laquelle la pression atmosphérique vaut  $P_0/e$  avec  $e = \exp(1)$  ( $\exp$  désigne la fonction exponentielle).

7. Exprimer  $H$  en fonction de  $T_0$ ,  $R$ ,  $g_0$  et  $M$ .
8. Calculer  $H$  et comparer à l'épaisseur  $H_{\text{Terre}}$  de la troposphère sur Terre (on donne pour la Terre,  $M = 28,9\text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ,  $T_0 = 285\text{ K}$  et  $g_0 = 9,81\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ).

L'essentiel du rayonnement visible du Soleil provient de sa photosphère, que l'on désignera par « surface solaire ». Elle est entourée d'une fine couche appelée chromosphère, puis de la couronne, laquelle est observable en particulier lors des éclipses. La figure 2.1 (photographie de L. VIATOUR <https://lucnix.be>) montre la couronne solaire observée en France lors de l'éclipse totale de 1999. La Lune, qui masque le Soleil, a un diamètre apparent presque identique à celui du Soleil.

La couronne est un milieu fortement variable et inhomogène. Sa structure est profondément influencée par le champ magnétique solaire. Dans tout ce problème, on ignore ces aspects et on étudie, sauf mention contraire, une « couronne moyenne », idéalisée et à symétrie sphérique. Dans un premier temps, on évalue sa température (partie I). On estime ensuite son contenu électronique (partie II). Le rayonnement radio qui provient du Soleil nous renseigne sur des propriétés physiques des régions d'émission (partie III). La couronne s'étend dans l'espace interplanétaire et sera bientôt approchée par la mission *Parker Solar Probe* (partie IV). La trajectoire de cette sonde pourra être corrigée par un moteur à hydrazine (partie V). Les données numériques sont regroupées en fin d'énoncé.



Fig. 2.1

## 2.1 Température dans la couronne solaire

**La mesure des températures en astrophysique. Application au Soleil.**

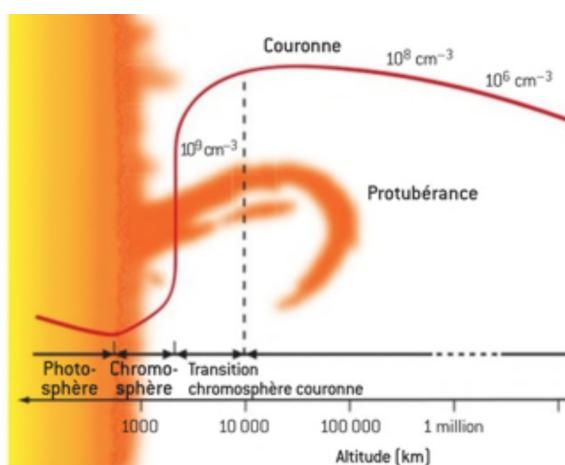
*D'après « Panorama de la physique », sous la direction de G. PIETRYK, Belin Pour la Science, 2012.*

Le spectre de raies d'émission est la signature des éléments chimiques présents dans le corps qui émet. Il permet d'obtenir des informations sur la température, par la largeur de ces raies, mais renseigne aussi par la présence de formes ionisées. Cette propriété est utilisée pour étudier la couronne solaire et accéder à la température du plasma dans cette région. La couronne n'est pas observable en même temps que le disque solaire, parce que sa luminosité est à peu près un million de fois inférieure, mais en occultant le disque on peut la voir très nettement. Cette occultation peut être naturelle (lors des éclipses) ou artificielle en utilisant des coronographes. L'analyse des raies émises par la couronne met en évidence l'existence d'atomes ionisés un grand nombre de fois. Par exemple le FeX est un atome de fer ionisé 9 fois qui existe dans la couronne. Or, l'étude en

laboratoire de la réaction de passage du FeIX à FeX a montré que cette réaction nécessite une température d'au moins  $1 \times 10^6$  K et que légèrement au-dessus apparaît l'ion FeXI. L'observation des raies de cet ion dans la couronne prouve donc d'une part qu'il y a du fer à cet endroit, mais aussi que la température qui y règne est d'environ  $1 \times 10^6$  K.

On constate grâce à ces observations que l'évolution de la température au voisinage du Soleil est complexe : partant de quelques milliers de degrés à la base de la photosphère, elle diminue d'abord comme on peut s'y attendre lorsqu'on s'éloigne d'un corps chaud, mais elle ré-augmente ensuite brutalement dans une région appelée région de transition (figure 2.2), pour atteindre un million de degrés. Cette température reste ensuite presque constante dans la haute couronne et dans le vent solaire, comme le montrent les mesures *in-situ*.

Aucune mesure n'a pu encore être faite directement dans la couronne elle-même, mais le vent solaire a fait l'objet de plusieurs missions spatiales comme Ulysse ou Wind. Le plasma du milieu interplanétaire étant extrêmement ténu, l'utilisation d'un thermomètre au sens classique (corps en équilibre thermodynamique avec le milieu) n'a pas de sens. En revanche, les sondes embarquent des détecteurs de particules qui les sélectionnent en fonction de leur énergie (en appliquant un champ électrostatique), les trient (en appliquant un champ magnétique) et enfin les comptent. Au final, la fonction de distribution obtenue donne l'énergie moyenne des particules et donc leur température.



**Fig. 2.2** – Profil de température dans la couronne solaire : l'échelle de distance, logarithmique, montre la faible épaisseur sur laquelle se fait la transition entre la basse température de la photosphère et la haute température de la couronne. Des ordres de grandeur de densités volumiques de particules sont aussi indiqués.

### 2.1.1 Une atmosphère très étendue

Observée en lumière blanche, la couronne s'étend assez loin du limbe solaire (figure 2.1). La couronne est constituée d'un plasma assimilé à un gaz parfait de masse molaire  $M_p$ . La masse moyenne d'une particule du milieu est notée  $m = M_p/\mathcal{N}_A$ , où  $\mathcal{N}_A$  est la constante d'AVOGADRO. On modélise la couronne par une atmosphère isotherme à la température  $T$  et à l'équilibre sous l'effet du champ de pesanteur solaire. Dans un premier temps, le champ de pesanteur est supposé uniforme, de norme  $g_s$ . La densité volumique de particules  $n_1(z)$  à l'altitude  $z$ , mesurée par rapport à la base de la couronne, a alors pour expression  $n_1(z) = n_0 \exp\left(-\frac{E_p(z)}{k_B T}\right)$  où  $E_p(z)$  est l'énergie potentielle d'une particule de masse  $m$  dans le champ de pesanteur et  $n_0$  la densité volumique de particules à l'altitude  $z = 0$ .

9. Donner l'expression de  $E_p(z)$  et en déduire que  $n_1(z) = n_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$  où  $H$  est la hauteur d'échelle, dont on donnera l'expression en fonction de  $m$ ,  $k_B$ ,  $T$  et  $g_s$ .
10. Le milieu est localement neutre et on le suppose constitué uniquement d'hydrogène totalement

ionisé. Exprimer  $m$  en fonction de la masse d'un proton ( $m_p$ ) et de celle d'un électron ( $m_e$ ).

11. Des mesures d'intensité lumineuse de la couronne conduisent à estimer une densité volumique de particules à l'altitude  $z_2 = R_s$ , où  $R_s$  est le rayon du Soleil, environ  $10^3$  fois plus faible qu'à l'altitude  $z_1 = 0$ . En déduire la valeur numérique de  $H$ , puis évaluer la température de la couronne.

On adopte un modèle à symétrie sphérique et on néglige l'effet de rotation du Soleil. La densité volumique de particules  $n_2(r)$  ne dépend que de la distance  $r$  au centre du Soleil. À l'équilibre, la pression  $p$  vérifie l'équation :

$$\frac{dp}{dr} = -\rho(r)g(r)$$

où  $g(r)$  désigne la norme du champ gravitationnel solaire et  $\rho(r)$  la masse volumique.

12. En négligeant la masse de la couronne et en supposant la distribution de masse du Soleil à symétrie sphérique, déterminer  $g(r)$  pour  $r \geq R_s$ , en fonction de  $g_s$ ,  $r$  et  $R_s$ <sup>1</sup>.
13. En déduire l'expression de  $n_2(r)$ . On notera  $n'_0 = n_2(R_s)$ .
14. Des observations ont permis de déterminer en fonction de  $r$  la densité volumique d'électrons dans la couronne « calme » (tableau 2.1). Vérifier la pertinence du modèle précédent à l'aide de ces données puis estimer la température de la couronne.

$r/R_s$	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
$n_e$ ( $\text{m}^{-3}$ )	$3,5 \times 10^{14}$	$2 \times 10^{14}$	$9 \times 10^{13}$	$5 \times 10^{13}$	$3 \times 10^{13}$

Tab. 2.1

1. Les 5/2 répondront à cette question, mais les 3/2 admettront l'expression  $g(r) = g_s \frac{R_s^2}{r^2}$

Pour marquer le millénaire, une nouvelle passerelle a été construite au dessus de la Tamise à Londres pour un coût total de plus de 20 millions de Livres Sterling.



Quand elle fut ouverte aux piétons on remarqua très vite qu'elle se balançait latéralement et verticalement en cas de forte affluence. Avec un grand nombre de piétons, son mouvement oblique était tel que la plupart d'entre eux s'arrêtaien et s'accrochaient aux rampes. Des images et des vidéos ont montré que ces mouvements latéraux pouvaient avoir une amplitude moyenne de 75 mm et qu'ils se produisaient avec des fréquences de l'ordre du hertz. Le pont fut donc fermé deux jours après son ouverture au public. Dix-huit mois de recherches furent nécessaire pour résoudre le problème et faire les modifications préconisées par les ingénieurs qui furent donc finalement consultés. L'objectif de ce problème est la modélisation de plus en plus fine d'une passerelle piétonne et la compréhension de certains problèmes posés par le Millennium Bridge de Londres.

Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires  $\hat{u}_x$  ou d'une flèche dans le cas général  $\vec{v}$ . À l'exception de  $i$  tel que  $i^2 = -1$ , les grandeurs complexes sont soulignées :  $\underline{z} \in \mathbb{C}$ . Un point sur une grandeur indique la dérivée par rapport au temps de cette grandeur :  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ .

### 3.1 Oscillateur simple

Un oscillateur est constitué d'une masse  $m$  dont le centre d'inertie  $G$  est repéré par la position  $x$  dans le référentiel galiléen  $(O, \hat{u}_x)$  – voir figure 3.1.

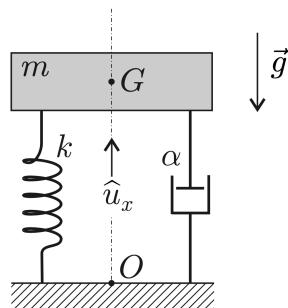
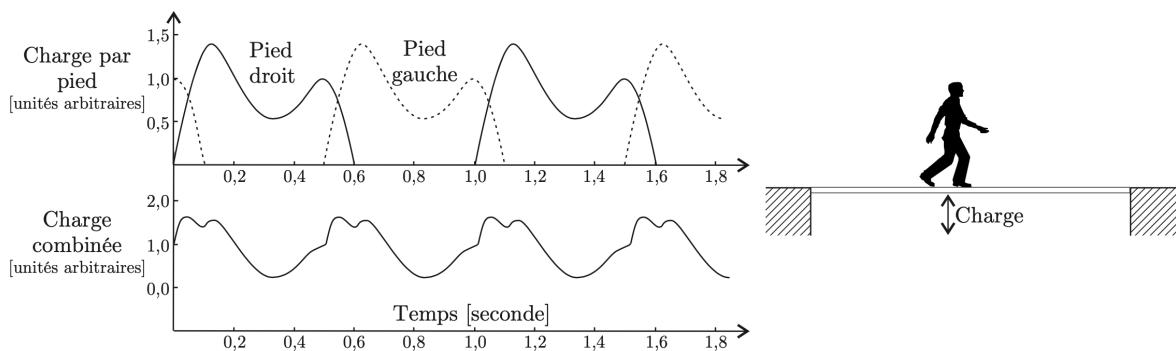


Fig. 3.1 – Oscillateur

L'origine  $O$  se situe au niveau du sol. L'oscillateur est relié à un support fixe par l'intermédiaire d'un ressort linéaire de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$  ainsi que d'un amortisseur linéaire de viscosité  $\alpha$ , exerçant sur  $m$  une force de frottement  $\vec{F}_f = -\alpha \dot{x} \hat{u}_x$ , avec  $\alpha > 0$ . À tout instant  $t$ , on assimile la distance  $OG$  à la longueur  $\ell(t)$  du ressort. L'ensemble est soumis à l'accélération de la pesanteur  $\vec{g} = -g \hat{u}_x$  avec  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

15. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique établir l'équation différentielle  $\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$  dans laquelle on a introduit la fonction  $X(t) = x(t) - \tilde{x}$  où  $\tilde{x}$  est une constante que l'on déterminera en fonction de  $g$ ,  $\omega_0$  et  $\ell_0$ . On précisera les expressions et significations de  $\omega_0$  et  $\xi$ .
16. Dans le régime libre, le système est mis en vibration uniquement par des conditions initiales non nulles  $X(0) = X_0 \neq 0$  et  $\dot{X}(0) = V_0 \neq 0$ . Déterminer les solutions du régime libre (en fonction de  $\omega_0$ ,  $\xi$ ,  $X_0$ ,  $V_0$  et  $t$ ) pour les cas  $\xi = 0$  et  $0 < \xi < 1$  et préciser leur comportement. Dans certains cas, le vent peut induire sur le système une force proportionnelle au vecteur vitesse que l'on écrit  $\vec{F}_v = \beta \dot{x} \hat{u}_x$ , avec  $\beta > 0$ . Quelle peut-être la conséquence de ce phénomène ?

Différents cas peuvent être examinés pour l'excitation (ou forçage)  $F(t)$  de l'oscillateur étudié lors des deux premières questions. Nous nous placerons dans l'optique d'une passerelle piétonne. L'action de la marche d'un piéton est caractérisée par un contact continu sur la surface du sol puisque le second pied touche le sol avant que le premier ne le quitte. La force engendrée comprend une composante verticale et une composante horizontale non prise en compte dans cette partie.



**Fig. 3.2 – Forçage d'une passerelle par la marche d'un piéton.**

Dans le cadre d'un modèle simplifié, nous représenterons cette force, appelée charge, par un vecteur périodique  $\vec{F}(t) = \vec{F}_0 + \vec{F}_1 \cos(2\pi ft)$ .

Le vecteur  $\vec{F}_0$  correspond à la force statique, c'est-à-dire au poids du piéton, la fréquence  $f$  correspond à celle d'une marche normale. Nous considérons que  $\vec{F}_1 = 0,4\vec{F}_0$ . Ces deux vecteurs seront supposés constants et orientés comme  $-\hat{u}_x$ .

On note  $F_0 = \|\vec{F}_0\|$  le module de la force statique,  $Y = X + \frac{F_0}{m\omega_0^2}$  la réponse en déplacement de l'oscillateur et  $\underline{Y} = Y_m e^{i\omega t}$  sa représentation complexe.

17. Que devient l'équation de l'oscillateur en  $Y$  sous le forçage piéton ? Déterminer la fonction de transfert  $\underline{H}(\omega)$ , rapport de la représentation complexe de la réponse en déplacement  $\underline{Y}$  sur la représentation complexe de l'excitation  $\underline{E} = \frac{1}{m}\underline{F}_1$ . On exprimera  $\underline{H} = \underline{Y}/\underline{E}$  en fonction de  $\xi$ ,  $\omega_0$  et  $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$ .
18. Sous quelle condition portant sur  $\xi$ , un phénomène de résonance peut-il se produire ? Pour quelle pulsation  $\omega_r$  obtient-on alors ce phénomène ? Exprimer le gain en amplitude à la résonance  $[\underline{H}](\omega_r)$  dans la limite  $\xi^2 \ll 1$ .
19. En se plaçant dans l'hypothèse  $\xi^1 \ll 1$  et à partir d'une analyse de la courbe 1 de la figure 3.3, déterminer un ordre de grandeur de  $\xi$  ainsi que la valeur de la pulsation propre  $\omega_0$  de l'oscillateur

modélisant le Millennium Bridge avant la mise en place des amortisseurs harmoniques.

20. Pourquoi est-il important de déterminer les fréquences de résonance d'une structure soumise à une action périodique ?

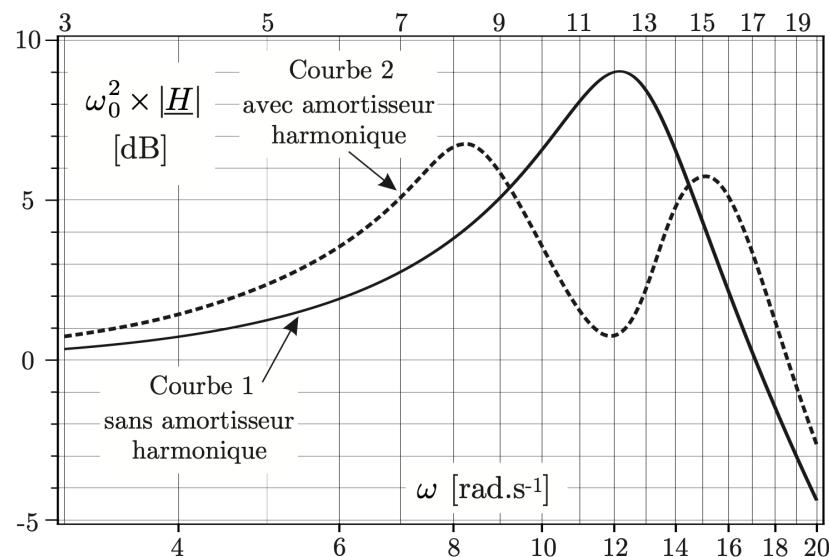
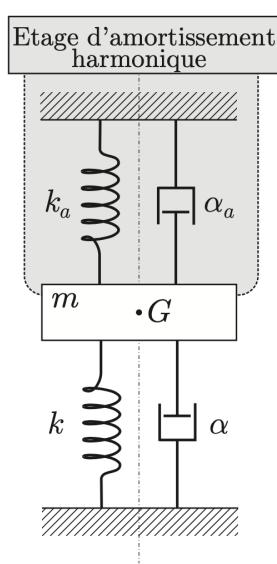


Fig. 3.3 – Schéma et réponse d'un amortisseur harmonique appliquée au modèle du Millennium Bridge.