DM N°6
Diffusion thermique

Lycée Langevin - Wallon

13 octobre 2021

À lire attentivement...

Les diverses parties peuvent être traitées dans l'ordre choisi par le candidat. Il prendra toutefois soin de bien numéroter les questions.

Les étudiants sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées. En particulier, tout résultat NON ENCADRÉ ne donnera pas lieu à attribution de points.

Toute application numérique NE COMPORTANT PAS D'UNITÉ ne donnera pas lieu à attribution de points. Les résultats numériques devront être donnés sous la forme appropriée.

Les candidats devront vérifier que le sujet comporte bien 5 pages numérotées 1/5, 2/5, ... 5/5. Le sujet comporte :

– un extrait d'annale de chimie.

L'EMPLOI DE LA CALCULATRICE OU DE TOUTE AUTRE AIDE ÉLECTRONIQUE, NOTAMMENT PYTHON, EST AUTORISÉ.
LE TRAVAIL AVEC SON COURS SOUS LES YEUX EST RECOMMANDÉ.
LE PHOTO-COPILLAGE DU TRAVAIL D'UN CAMARADE SERA SANCTIONNÉ.

Si au cours de la rédaction, un étudiant repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

1 2021 CCP TSI Physique Chimie – Chauffe-eau

Un chauffe-eau est composé d'une cuve cylindrique fermée généralement en acier émaillé, dans laquelle se trouve un dispositif de chauffage piloté par un thermostat (figure 1.1). La cuve est en permanence remplie d'eau. En effet, lorsqu'on puise de l'eau chaude, de l'eau froide remplace au fur et à mesure la quantité d'eau chaude utilisée. Le dispositif de chauffage réchauffe l'eau jusqu'à une température de consigne préalablement définie, puis s'arrête. Si de l'eau est puisée, il se remet en fonctionnement.

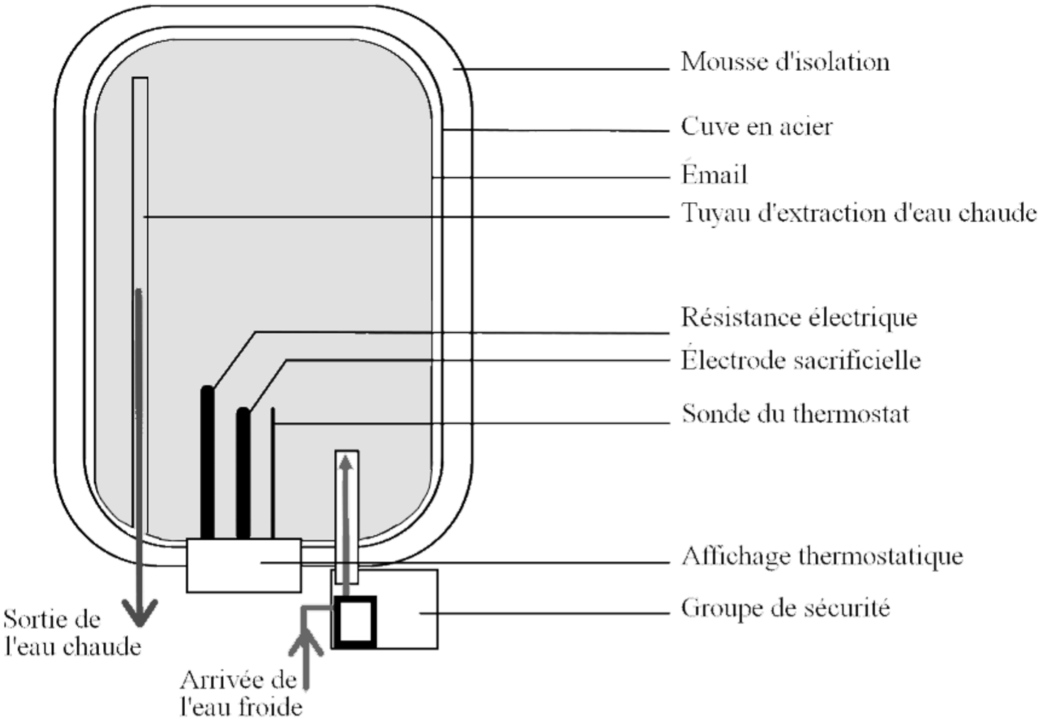

Fig. 1.1 – Schéma descriptif d'un chauffe-eau électrique

1.1 Entretien du chauffe-eau

1.1.1 Problème de calcaire

Formation de calcaire à la surface du thermoplongeur

Données :

– Formule de TAYLOR à l'ordre 1 : $f(r+\mathrm{d}r) = f(r) + \frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r$;
– Expression du gradient en coordonnées cylindriques pour un champ scalaire V ne dépendant que de r : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V(r) = \frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}\vec{u}_r$.

Pour chauffer l'eau de la cuve, le chauffe-eau électrique est muni d'un thermoplongeur constitué d'un fil résistif parcouru par un courant électrique qui s'échauffe par effet JOULE. Ce fil est recouvert d'un isolant et le tout est placé dans un tube blindé. On assimile ce thermoplongeur à un tube d'acier de longueur L, de rayon r_0 et dont la température de surface est maintenue à T_1 (figure 1.2).

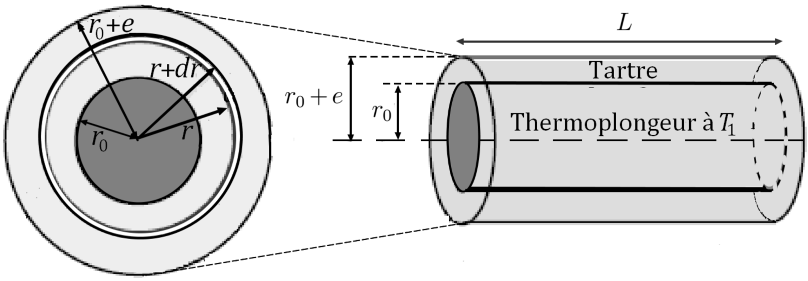

Fig. 1.2 – Schéma du thermoplongeur recouvert de tartre

Ce tube, en contact direct avec l'eau du chauffe-eau, est sensible au tartre (dépôt de calcaire) qui entrave la diffusion de la chaleur. On suppose qu'une couche cylindrique de tartre d'épaisseur e et de conductivité thermique λ se dépose sur le tube.
On considère que le champ de température et le vecteur densité de flux thermique ne dépendent que de la distance r à l'axe. On note ainsi $T(r)$ le champ de température dans le cylindre de tartre auquel on associe un transfert thermique radial de vecteur densité de flux thermique $\vec{j} = j(r)\vec{u}_r$, $\vec{u}_r$ désignant un vecteur unitaire dirigé selon un des rayons du tube et perpendiculaire à l'axe du tube.
Dans le cadre de cette étude, on se place en régime permanent, l'évolution temporelle de la température de l'eau T_e étant supposée lente.
On se place suffisamment loin des extrémités du tube pour pouvoir négliger les effets de bord. On néglige tout phénomène de rayonnement ; on se limite aux échanges conducto-convectifs entre la paroi du tube recouverte de tartre et l'eau. On désigne le coefficient d'échange à la paroi par la constante h et on note T_p la température de la paroi.

1. Définir le flux thermique ϕ à travers une surface S. Préciser son unité.
2. À l'aide d'un bilan d'énergie portant sur le cylindre infinitésimal de tartre de rayon interne r et de rayon externe $r + \mathrm{d}r$ tel que $r_0 < r < r_0 + e$ (figure 1.2), montrer que la composante radiale du vecteur densité de flux thermique $j(r)$ satisfait l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(rj(r)\right) = 0$$

3. Énoncer la loi de Fourier.
4. Montrer que le champ de température $T(r)$ dans le tartre peut se mettre sous la forme :

$$T(r) = A\ln(r) + B$$

   où A et B désignent les constantes d'intégration que l'on ne cherchera pas à déterminer.
5. Exprimer la composante radiale du vecteur densité de flux thermique $j(r)$ en fonction de λ, A et r.
6. En déduire l'expression du flux thermique ϕ en fonction de λ, A et L.
7. Définir la résistance thermique R_t du cylindre de tartre et en déduire son expression en fonction de T_1, T_p, λ, A et L.

À la frontière entre le tartre et l'eau, la convection de l'eau est limitée par les frottements sur la paroi de tartre. Le transfert thermique à travers la paroi est donné par la loi de Newton :

$$\Phi_{t\to e} = 2\pi(r_0 + e)Lh(T_p - T_e)$$

8. Déterminer l'expression de la résistance thermique R_{cc} résultant du transfert conducto-convectif entre la paroi de tartre et l'eau en fonction de r_0, e, h et L.
9. À l'aide d'un schéma électrique équivalent, montrer que le transfert thermique entre la paroi in-

terne du tartre à la température T_1 et l'eau à la température T_e est représenté par une résistance équivalente R_{eq} dont on précisera l'expression en fonction de R_t et R_{cc}.

Dans le cas du tartre, $h = 100\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ et $\lambda = 0{,}9\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. L'évolution de la résistance thermique équivalente R_{eq} en fonction de l'épaisseur e de tartre est représentée sur la figure 1.3.

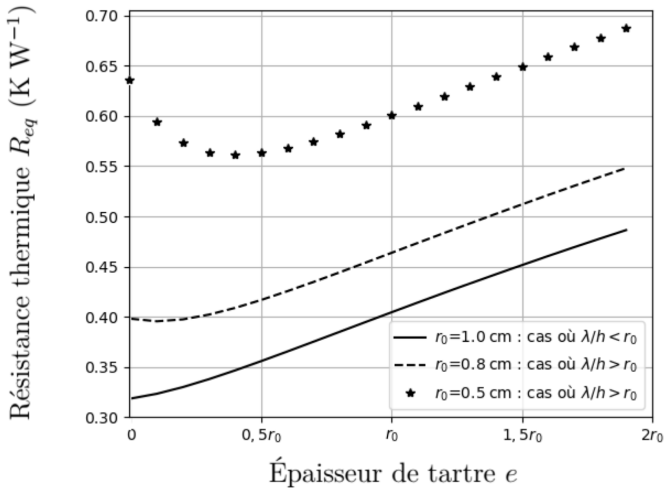

Fig. 1.3 – Évolution de la résistance thermique équivalente en fonction de l'épaisseur de tartre pour une longueur arbitraire du thermoplongeur $L = 50\,\text{cm}$

10. On note e_{min} l'épaisseur minimale à partir de laquelle le tartre augmente l'isolation thermique. Déterminer approximativement les 3 valeurs de e_{min}, exprimées en fonction de r_0, correspondant aux 3 différents cas présentés sur la figure 1.3.

Les constructeurs de chauffe-eau indiquent qu'un chauffe-eau entartré aura plus de risques de surchauffe et demandera plus d'énergie pour fonctionner.

11. En régime permanent, on souhaite maintenir la température de l'eau à T_e. Comment évoluera la température de surface T_1 du thermoplongeur lorsque l'épaisseur de tartre deviendra supérieure à e_{min}. Faut-il utiliser un rayon r_0 de thermoplongeur faible ou élevé devant λ/h pour limiter les risques de surchauffe ?

Le tableau 1.1 précise les conductivités thermiques, les masses volumiques et les capacités thermiques massiques de l'acier et du calcaire (tartre).

Données	Conductivité thermique	Masse volumique	Capacité thermique massique
Acier	$15\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$	$8000\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	$500\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$
Tartre	$0{,}9\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$	$2500\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	$900\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$

Tab. 1.1 – Données relatives à l'acier et au calcaire

On rappelle l'équation de diffusion de la chaleur :

$$D\Delta T = \frac{\partial T}{\partial t}$$

où $\Delta T = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)$ désigne le laplacien en coordonnées cylindriques pour le champ de température $T(r)$, $D = \frac{\lambda}{\mu c}$ la diffusivité thermique du milieu, λ sa conductivité thermique, μ sa masse volumique et c

sa capacité thermique massique.

12. Montrer que la dimension de la diffusivité thermique du milieu D est une longueur au carré par unité de temps.
13. On note τ_a la durée d'établissement du régime permanent au sein du thermoplongeur assimilé à une tige d'acier de rayon $r_0 = 1\,\text{cm}$ et τ_t la durée d'établissement du régime permanent au sein d'un dépôt de tartre d'épaisseur $e \simeq r_0$. Déterminer l'ordre de grandeur du rapport $\frac{\tau_a}{\tau_t}$.
14. Commenter les recommandations des constructeurs.