DM N°8
Statique des fluides

Lycée Langevin - Wallon

10 novembre 2021

À lire attentivement...

Les diverses parties peuvent être traitées dans l'ordre choisi par le candidat. Il prendra toutefois soin de bien numéroter les questions.

Les étudiants sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées. En particulier, tout résultat NON ENCADRÉ ne donnera pas lieu à attribution de points.

Toute application numérique NE COMPORTANT PAS D'UNITÉ ne donnera pas lieu à attribution de points. Les résultats numériques devront être donnés sous la forme appropriée.

Les candidats devront vérifier que le sujet comporte bien 4 pages numérotées 1/4, 2/4, ... 4/4. Le sujet comporte :

– deux extraits d'annale de physique.

L'EMPLOI DE LA CALCULATRICE OU DE TOUTE AUTRE AIDE ÉLECTRONIQUE, NOTAMMENT PYTHON, EST AUTORISÉ.
LE TRAVAIL AVEC SON COURS SOUS LES YEUX EST RECOMMANDÉ.
LE PHOTO-COPILLAGE DU TRAVAIL D'UN CAMARADE SERA SANCTIONNÉ.

Si au cours de la rédaction, un étudiant repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

1 2021 CCMP MP – L'hypothèse atomique

Les études théoriques sur le mouvement brownien, proposées par Albert EINSTEIN en 1905 et complétées par celles de Paul LANGEVIN en 1908, ont été spectaculairement confirmées par une série d'une dizaine d'expériences réalisées entre 1907 et 1909 par Jean PERRIN dont nous fêtons le 150e anniversaire de naissance. Ces études sont les piliers de l'acceptation de l'existence des atomes par la communauté scientifique. En 1926, PERRIN obtint le prix Nobel pour ses expériences !

Pour réaliser ses expériences, Jean PERRIN utilise des grains de gomme-gutte. Écoutons le décrire son procédé d'obtention de ses grains : « *La gomme-gutte, qu'on utilise pour l'aquarelle, provient de la dessiccation du latex. Un morceau de cette substance, frotté avec la main sous un mince filet d'eau distillée se dissout peu à peu en donnant une belle émulsion opaque d'un jaune vif, où le microscope révèle un fourmillement de grains jaunes de diverses tailles parfaitement sphériques. On peut calibrer ces grains jaunes et les séparer du liquide où ils baignent par une centrifugation énergique.* »

Dans tout ce problème, ces grains seront donc supposés identiques, de forme sphérique, de rayon $R_b = 0{,}2\,\mu\text{m}$, de volume $V_b = 3{,}4 \times 10^{-20}\,\text{m}^3$ et de masse volumique $\mu_b = 1{,}2 \times 10^3\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$. On note $m_b = 4{,}1 \times 10^{-17}\,\text{kg}$ la masse d'un grain. Dans ses expériences, Jean PERRIN fabrique une émulsion en introduisant ces grains dans de l'eau légèrement sucrée. Ce liquide possède une masse volumique assimilable à celle de l'eau pure $\mu_e = 1{,}0 \times 10^3\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Le peu de sucre dissous dans l'eau lui confère tout de même un caractère visqueux. De ce fait, l'eau exerce sur les grains en mouvement deux forces :

– la résultante des forces de pression est donnée par la loi d'ARCHIMÈDE : cette force $\vec{\Pi} = -\mu_e V_b \vec{g}$ est exactement opposée au poids du liquide déplacé par chaque grain ;
– la résultante des forces de frottement visqueux se traduit par une force $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ où $\alpha > 0$ et $\vec{v}$ désigne la vitesse des grains. La formule de STOKES précise que, pour un grain sphérique,$\alpha = 6\pi\eta R_b$ dans laquelle $\eta = 1{,}2 \times 10^{-3}\,\text{Pa}\cdot\text{s}$ représente le coefficient de viscosité dynamique de l'eau légèrement sucrée. Avec ces valeurs numériques, on trouve ici $\alpha = 4{,}5 \times 10^{-9}\,\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$.

Dans ce qui suit on utilisera la fonction $A(z) = \exp(-z/H)$. Les vecteurs sont surmontés d'une flèche $\vec{f}$, sauf s'ils sont unitaires et sont alors repérés par un chapeau ($\|\widehat{e}_x\| = 1$). Les applications numériques seront données avec un chiffre significatif. La valeur moyenne temporelle d'une fonction $\varphi(t)$ sera notée $\langle\varphi\rangle$. Toute réponse, même qualitative, se doit d'être justifiée. **Les affirmations, même justes, mais non justifiées ne seront pas prises en compte**.

1.1 Équilibre vertical d'un gaz à la température ambiante

On considère un gaz parfait constitué de molécules identiques, de masse molaire $M = 30\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$, en équilibre thermique à la température ambiante T_0. Le gaz, soumis à la pesanteur, est au repos dans

un récipient de volume V , de hauteur h de l'ordre de quelques mètres, et de section $S = 1\,\text{m}^2$. L'encombrement caractéristique d'une molécule constituant ce gaz est une sphère de rayon R_m de l'ordre de la centaine de picomètres.
On rappelle les valeurs de l'accélération de la pesanteur $g = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, de la constante de BOLTZMANN, $k_B = 1{,}4\times10^{-23}\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$, de la constante d'AVOGADRO, $\mathcal{N}_\text{A} = 6{,}0\times10^{23}\,\text{mol}^{-1}$ et éventuellement de leur produit $R = k_B\mathcal{N}_\text{A} = 8{,}3\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$.

1. En précisant les valeurs choisies de température T_0 et de pression (supposée provisoirement uniforme) P_0, estimer le volume molaire du gaz. En déduire une estimation du rapport entre le volume occupé par l'ensemble des sphères associé aux molécules et le volume du récipient.
2. Rappeler la définition d'un gaz parfait. Les ordres de grandeur établis à la question précédente justifient-ils d'adopter ce modèle dans la suite ?
3. Donner l'expression de l'énergie cinétique E_{cm} et de l'énergie potentielle E_{pm} d'une particule de masse m_m de ce gaz. Pourquoi observe-t-on qu'à température ambiante ces molécules ne se regroupent pas au fond du récipient ?

La loi de la statique des fluides montre que, sous l'action de la pesanteur, la pression $P(z)$ n'est pas uniforme verticalement et dépend de l'altitude z.

4. En déduire que la masse volumique ρ du gaz dépend aussi de z et l'exprimer en fonction de $P(z)$. Écrire la condition d'équilibre mécanique pour une tranche de gaz comprise entre les altitudes z et $z + \mathrm{d}z$ pour laquelle on supposera l'équilibre thermodynamique local réalisé. En déduire une équation différentielle vérifiée par $P(z)$.
5. En notant $P_0 = P(z = 0)$, montrer que $\frac{P(z)}{P_0}$ s'exprime simplement grâce à la fonction $A(z)$. Exprimer la distance caractéristique H en fonction de k_B, g, T_0 et m_m. Calculer la valeur numérique de H. La variation de pression est-elle détectable, avec un manomètre usuel, dans le récipient considéré ? En serait-il de même si le récipient était rempli d'eau liquide ?
6. Préciser la fonction $E(z)$ telle que $A(z) = \exp\left[-\frac{E(z)}{k_BT_0}\right]$. Que représente la fonction $E(z)$? Interpréter physiquement cette expression dont la généralisation est due à BOLTZMANN.
7. Montrer que la concentration $c_g(z)$ du gaz, rapport du nombre de moles sur le volume, suit une loi du même type, et qu'on peut écrire $c_g(z) = c_{g0}A(z)$, où c_{g0} représente la concentration au niveau du sol $(z = 0)$ dont on précisera l'expression.

1.2 Étude d'un équilibre de sédimentation

Dans une première expérience, Jean PERRIN lâche, sans vitesse initiale, à la surface d'un récipient, un grand nombre ($N = 13000$) de grains dans de l'eau légèrement sucrée. Le récipient a une section S et une hauteur h_1 suffisante pour être considérée comme infinie.

8. Faire le bilan des forces exercées sur un des grains lors de sa chute dans l'eau sucrée.
9. On note $\vec{v}(t) = -v(t)\widehat{e}_z$ la vitesse de chute du grain, $\widehat{e}_z$ étant l'axe vertical ascendant, et $v(t) > 0$. Établir l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$ puis donner sa solution.
   Montrer qu'une fois le régime permanent établi, les grains possèdent une vitesse limite $v_\ell = m^*g/\alpha$.
   Exprimer le paramètre m^* en fonction de V_b et des masses volumiques μ_b et μ_e. Justifier qu'on nomme cette quantité « masse apparente ».
   Exprimer la durée caractéristique τ du régime transitoire en fonction de m_b et α. Évaluer un ordre de grandeur de v_ℓ et de τ.

2 2020 CCMP MP Physique 1 – Les Mayas

Les phénomènes naturels terrestres ou célestes ont nourri, au fil des âges, les cultures des civilisations anciennes et contribué à forger leur vision du monde. Les exemples astronomiques sont nombreux. Il n'est pas rare de trouver, par exemple, des bâtiments orientés selon les directions astronomiques des levers et couchers du Soleil ou de Vénus, astres qui furent souvent associés à des divinités importantes.

Notations et valeurs numériques

- Valeurs numériques : lorsqu'une valeur numérique non nulle est demandée, l'écart relatif de la réponse par rapport à la valeur exacte ne doit pas excéder 20 %.
- Données astronomiques : les données numériques astronomiques sont regroupées à la fin de l'énoncé. Les deux parties du problème sont indépendantes.

2.1 Couleur de la Lune totalement éclipsée

2.1.1 Modèle d'atmosphère isotherme

On suppose que l'atmosphère terrestre est en équilibre mécanique à une température $T \simeq 20\,°\mathrm{C}$ uniforme et stationnaire. On cherche le profil altimétrique de masse volumique : c'est-à-dire l'expression de la masse volumique ρ_a en fonction de l'altitude Z mesurée depuis un point G de la surface terrestre (Fig. 2.1). Le vecteur unitaire $\vec{e}_Z$ sera dirigé dans le sens de la verticale ascendante, et on note $g \simeq 9{,}80\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$, l'intensité du champ de pesanteur terrestre.

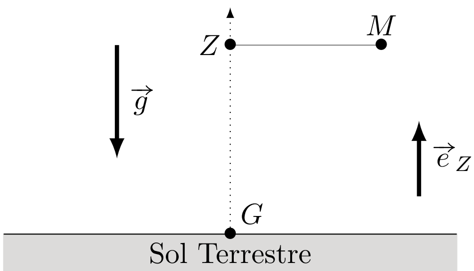

Fig. 2.1 – Un point dans l'atmosphère terrestre.

L'air est assimilé à un gaz parfait de masse molaire $M_a \simeq 29\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$. On note $R \simeq 8{,}31\,\mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$ la constante des gaz parfaits.

10. Déterminer le profil altimétrique de masse volumique $\rho_a(Z)$ en fonction de $\rho_a(0)$ et d'une hauteur caractéristique H_c que l'on exprimera et dont on calculera la valeur numérique.
11. Évaluer numériquement la masse volumique de l'air au niveau de la mer (pression d'environ 1 bar) puis en déduire celle de l'air au sommet du mont Everest (8 848 m d'altitude) : on indique que $\exp(-1) \simeq 1/3$. Les valeurs moyennes annuelles de pression et de température au sommet de l'Everest sont respectivement $321\,\mathrm{hPa}$ et $-23\,°\mathrm{C}$. Le modèle isotherme est-il réaliste ?