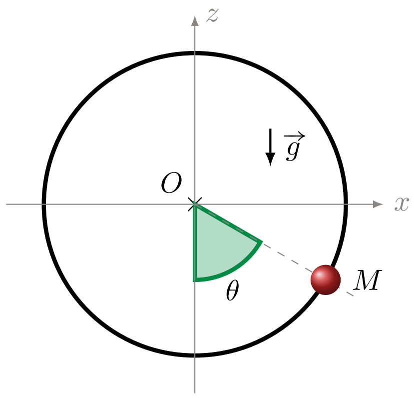
6 Approches énergétiques

6.1 Problèmes de khôlle

6.1.1 Cerceau et anneau

Un anneau de masse m est enfilé dans un cerceau de rayon R sur lequel il glisse sans frotter.

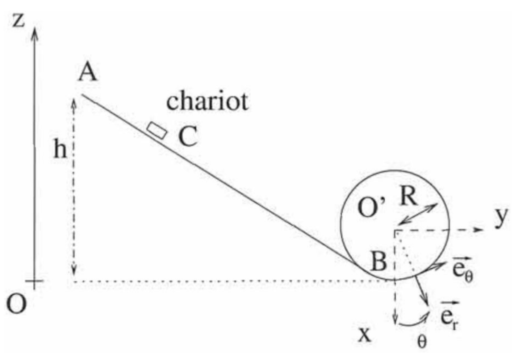


1. Quelles sont les forces qui s'exercent sur l'anneau ?
2. Montrer que le travail de l'une de ces forces est nulle.
3. Montrer que l'autre force dérive d'une énergie potentielle à déterminer en fonction de R et θ.
4. Déterminer l'expression de l'énergie cinétique de l'anneau en fonction de R et θ.
5. Déterminer l'équation de mouvement de l'anneau.
6. Quelle est la période des petites oscillations ?

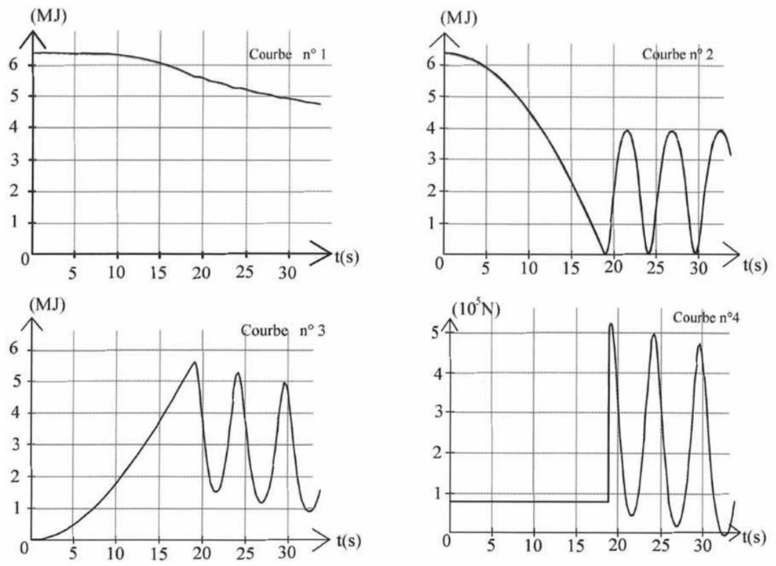
Banque PT

6.1.2 Parc d'attraction

On étudie numériquement la trajectoire d'un chariot de parc d'attraction, de masse $m = 10$ tonnes. Ce chariot part du point A, descend le long du plan incliné et entre ensuite dans un looping haut de 40 m, où l'on suppose qu'il peut parcourir plusieurs tours.



Les courbes de la figure 6.1.2 représentent l'évolution au cours du temps de l'énergie cinétique E_c, de l'énergie potentielle E_p, de l'énergie totale E_m et l'évolution de la réaction normale R_n du looping sur le chariot.



1. Associer à chaque courbe la grandeur représentée. La simulation prend-elle en compte des frottements et autres sources de dissipation ?
2. Calculer la hauteur initiale h et la vitesse initiale V_0 du chariot, la vitesse maximale $V_{\text{max, exp}}$ qu'il atteint et la valeur $V_{\text{max, th}}$ qu'il atteindrait sans frottements .
3. À quelle date le chariot quitte-t-il le looping en décollant ?
4. Combien de tours entiers effectue le chariot avant de se décoller du looping ?
5. Quelle hauteur initiale faudrait-il donner au chariot afin qu'il ne décolle pas lors de son dernier tour ?

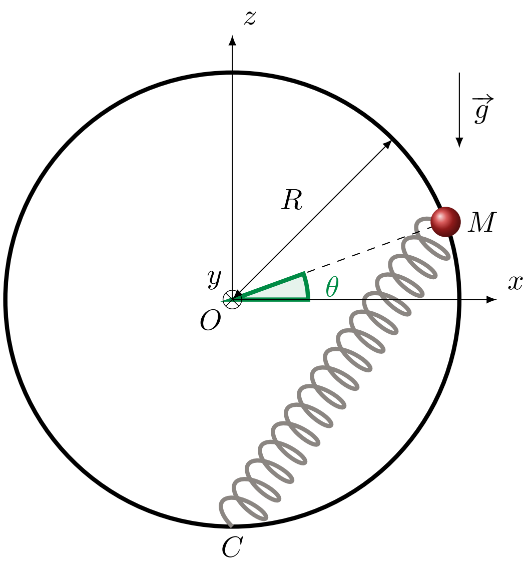
Données :

$g \simeq 10\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$

Banque PT

6.1.3 Cerceau, bille et ressort

Une bille percée M de masse m est contrainte à se déplacer sans frottements dans un cerceau de rayon R. Elle est par ailleurs reliée à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0.

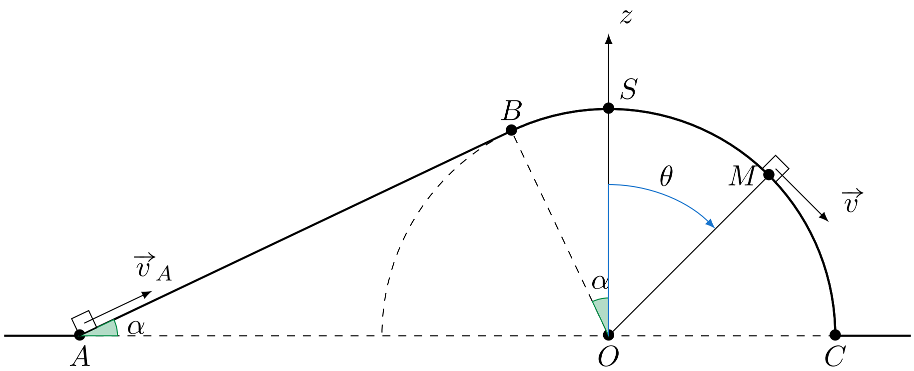


1. Compléter le schéma par un bilan des forces détaillé.

2. En déduire l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_{p1}$ du point M en fonction de m, g, R et θ. On prendra la convention $\mathcal{E}_{p1}(z = z_C) = 0$.
3. Montrer que l'énergie potentielle élastique s'écrit $\mathcal{E}_{p2} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$ où ℓ est la longueur du ressort, ℓ_0 sa longueur à vide et k sa constante de raideur.
4. En déduire une expression de $\mathcal{E}_{p2}$ en fonction de k, ℓ_0, R et θ.
5. On suppose dorénavant que $\ell_0 = 0$, établir les positions d'équilibre du point M.
6. Discuter de leur stabilité.

6.1.4 Le jeu du palet

Un palet M de masse m, assimilé à un point matériel, est lancé sur une piste composée d'une portion rectiligne AB, inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale, et d'une portion circulaire BC, circulaire de rayon R et d'angle $(\widehat{OB, OC}) = \frac{\pi}{2} + \alpha$ comme représenté sur la figure ci-dessous.
Le palet initialement lancé depuis A avec la vitesse $\vec{v}_A$ glisse sans frottement sur la piste. On désigne par g l'intensité du champ de pesanteur.



On s'intéresse à la portion de trajectoire AB.

1. Énoncer le théorème de l'énergie cinétique et, en supposant que le point B est atteint, exprimer la vitesse v_B en fonction de v_A, g, R et α.
2. En déduire la vitesse minimale $v_{A,\text{min}}$ permettant de parvenir en B.
3. À l'aide du théorème de la puissance cinétique, exprimer la vitesse $v(t)$ du palet sur la portion AB en fonction de v_A, g, t et α.

On s'intéresse maintenant à la portion BC.

4. Exprimer la vitesse $\vec{v}(M)$ et l'accélération $\vec{a}(M)$ en coordonnées polaires.
5. Après avoir fait un bilan des forces sur cette portion, appliquer le principe fondamental de la dynamique et en déduire l'expression de la réaction normale R_N en fonction de m, g, R, θ et $\dot{\theta}$.
6. Déterminez par méthode énergétique une relation entre $v(M)$, θ, g, R, α et v_B.
7. En déduire $\left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$ en fonction de θ, v_A et des constantes précédentes.
8. À quelle condition sur v_A n'y aura-t-il pas décollage de M avant le sommet S ?