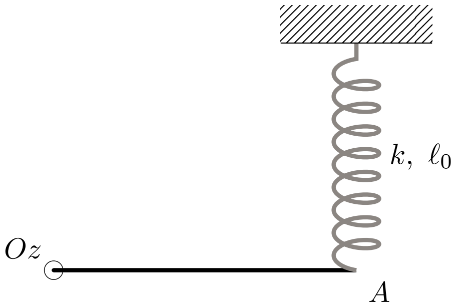
8 Introduction à la mécanique des solides

8.1 Problèmes de khôlle

8.1.1 Équilibre d'une barre rigide

On considère le système ci-dessous, constitué d'une barre de masse m, de longueur $OA = 2a$, libre de tourner sans frottement autour de l'axe Oz. Son moment d'inertie par rapport à cet axe vaut $I_z = \frac{4}{3}ma^2$. Elle est attachée en A à un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k. L'autre extrémité du ressort est fixe.

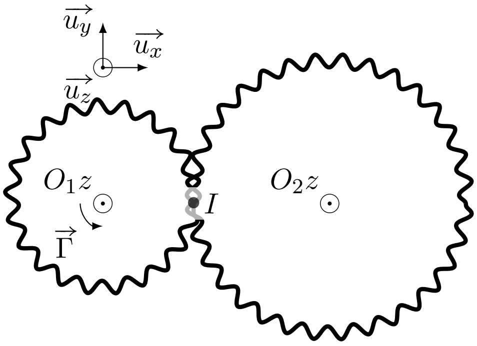


1. Dans la position d'équilibre, la barre est horizontale et le ressort vertical. Donner la longueur du ressort à l'équilibre en fonction de k et de ℓ_0.
2. La barre est légèrement écartée de sa position d'équilibre puis lâchée sans vitesse initiale. Déterminer la période des petites oscillations. Comme les angles sont très petits, on peut considérer que le point A se déplace verticalement.

Banque PT

8.1.2 Engrenages

Deux roues dentées de centres O_1 et O_2, de rayons R_1 et R_2 sont accouplées par engrenage et il n'y a donc aucun glissement relatif entre leur point de contact noté I.
La première roue appartient à un solide S_1 tournant autour de l'axe O_1z dont le moment d'inertie par rapport à cet axe est J_1. Ce solide est entraîné par un moteur de couple $\vec{\Gamma} = \Gamma\vec{u_z}$. La deuxième roue appartient à un solide S_2 tournant autour de l'axe O_2z dont le moment d'inertie par rapport à cet axe est J_2. Ce solide est soumis à une force de frottement de moment par rapport à O_2z : $\mathcal{M}_{O_2z} = -\lambda\omega_2$ où ω_2 est la vitesse de rotation de S_2.
Les liaisons sont parfaites et les centres d'inertie des solides sont sur leurs axes de rotation respectifs.



1. Reproduire le schéma ci-dessus en y représentant les diverses forces et moments appliqués aux systèmes S_1 et S_2.
2. Écrire le théorème du moment cinétique appliqué à un solide. En déduire son application au système S_1 puis au système S_2.
3. Établir une relation entre les valeurs algébriques ω_1 et ω_2.
4. En déduire l'équation différentielle vérifiée par ω_1.

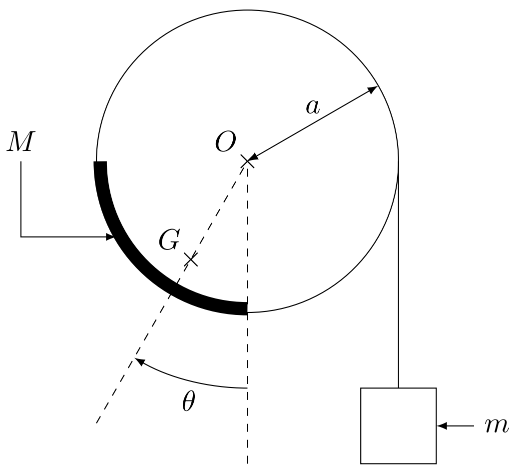
On note $\tau = \frac{J_1+J_2\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2}{\lambda\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2}$.

5. Quelle est la dimension de τ ?
6. Résoudre l'équation différentielle vérifiée par ω_1. En déduire la valeur de la vitesse de rotation de S_1 atteinte au régime permanent.

8.1.3 Rotation d'un cylindre avec balourd

Un cylindre d'axe Ox et de rayon a tourne librement. Un dépôt sur la paroi du cylindre forme un balourd de masse M et de centre de gravité G tel que $OG = d$.
On néglige la masse propre et le moment d'inertie du cylindre devant celui du balourd de sorte que le moment d'inertie de l'ensemble, par rapport à l'axe de rotation, s'exprime par $J = Ma^2$.

Une masse m est accrochée à un fil inextensible, de masse nulle, enroulé autour du cylindre.



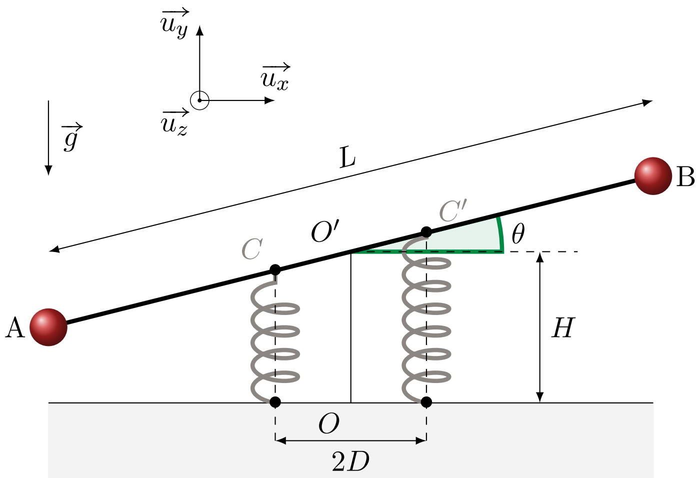
1. Interpréter qualitativement le mouvement obtenu pour plusieurs valeurs de la masse m. Faire apparaitre une masse critique m_c.
2. Trouver l'angle d'équilibre θ_e et donner la période des petites oscillation du système autour de cette position d'équilibre.

Banque PT

8.1.4 Balançoire

On modélise une balançoire par une planche mobile en rotation autour d'un axe $O'z$ fixe, de longueur L et de masse M. La planche est équilibrée et on note J le moment d'inertie par rapport à $O'z$ du système $\{planche+enfant\}$. On modélise les enfants par des systèmes ponctuels A et B de mêmes masses m, solidaires des extrémités de la balançoire. L'ensemble forme un seul et même solide indéformable noté S.

La balançoire est soumise aux actions de deux ressorts identiques, de constante de raideur k et de longueur au repos $\ell_0 = H$. On se place dans la limite des petits angles de sorte que les axes des ressorts restent verticaux, à une distance D de O et O'. On néglige toute forme de frottements.



1. Faire un bilan précis des diverses actions mécaniques exercées sur S.
2. Montrer que l'action mécanique de l'ensemble des deux ressorts sur la balançoire est un couple dont on donnera le moment par rapport à $O'z$, en fonction de θ.
3. Établir l'équation différentielle dont $\theta(t)$ est solution.
4. Montrer que ses solutions correspondent effectivement à un mouvement oscillant dont on exprimera la période en fonction de J, D et k.