

# Table des matières

<b>15 Régime stationnaire : champ magnétostatique</b>	<b>2</b>
<b>15.1 Exercices d'application</b>	<b>3</b>
15.1.1 Distributions de courant.....	3
15.1.2 Théorème d'AMPÈRE et lignes de champ .....	3
15.1.3 Utilisation du théorème d'AMPÈRE .....	4
<b>15.2 Problèmes</b>	<b>4</b>
15.2.1 Cylindres coaxiaux .....	4
15.2.2 Modèles divers de solénoïdes .....	5
15.2.3 Faisceau de particules.....	5
<b>15.3 Oral Banque PT</b>	<b>6</b>
15.3.1 Pression hydrostatique et champ magnétique.....	6
15.3.2 Puissance électromagnétique d'un conducteur .....	6
15.3.3 Cylindre avec cavité .....	7
<b>15.4 Annales</b>	<b>7</b>
15.4.1 Étude de divers capteurs .....	7

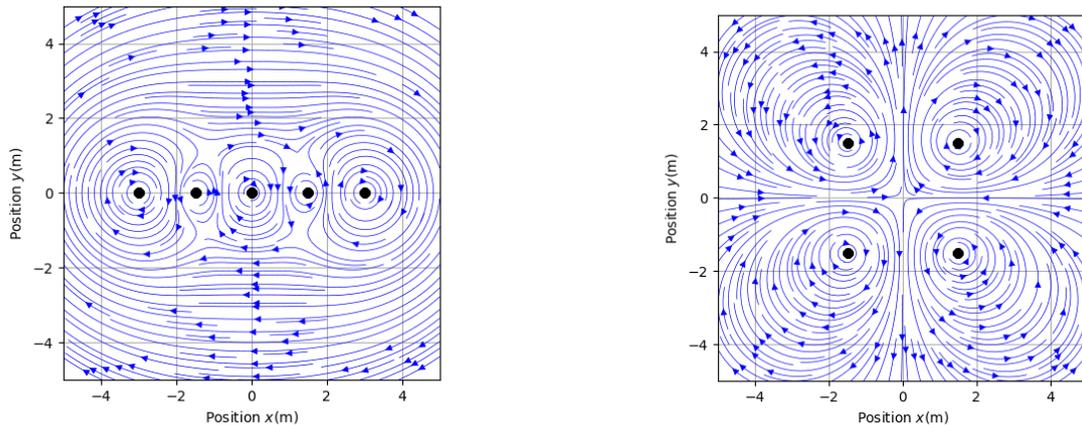
---

# **15 Régime stationnaire : champ magnétostatique**

## 15.1 Exercices d'application

### 15.1.1 Distributions de courant

On donne les lignes de champ magnétostatique générées par une distribution de courants filiforme perpendiculaires aux plans représentés dans les figures 15.1 et 15.2. On prend la convention de compter positivement les courants orientés vers le lecteur.



**Fig. 15.1** – Les courants sont numérotées de 0 à 4 en partant de la gauche

**Fig. 15.2** – Les courants sont numérotées de 0 à 3, dans le sens des aiguilles d'une montre, en partant du coin supérieur gauche

1. On s'intéresse à la distribution de courant de la figure 15.1,
  - (a) Donner le signe de chacun des courants.
  - (b) Existe-t-il des plans de symétrie dans cette distribution de courants ?
  - (c) Existe-t-il des plans d'anti-symétrie dans cette distribution de courants ?
2. On s'intéresse à la distribution de courants de la figure 15.2,
  - (a) Donner le signe de chacun des courants.
  - (b) Existe-t-il des plans de symétrie dans cette distribution de courants ?
  - (c) Existe-t-il des plans d'anti-symétrie dans cette distribution de courants ?

### 15.1.2 Théorème d'Ampère et lignes de champ

On donne les cartographies de champ magnétostatique de la figure 15.3, généré par les deux courants  $i_d$  et  $i_g$  matérialisés par des points noirs. La figure de gauche donne les lignes de courant du champ magnétique, la figure de droite donne les lignes iso-valeurs de  $\log \|\vec{B}\|$ .

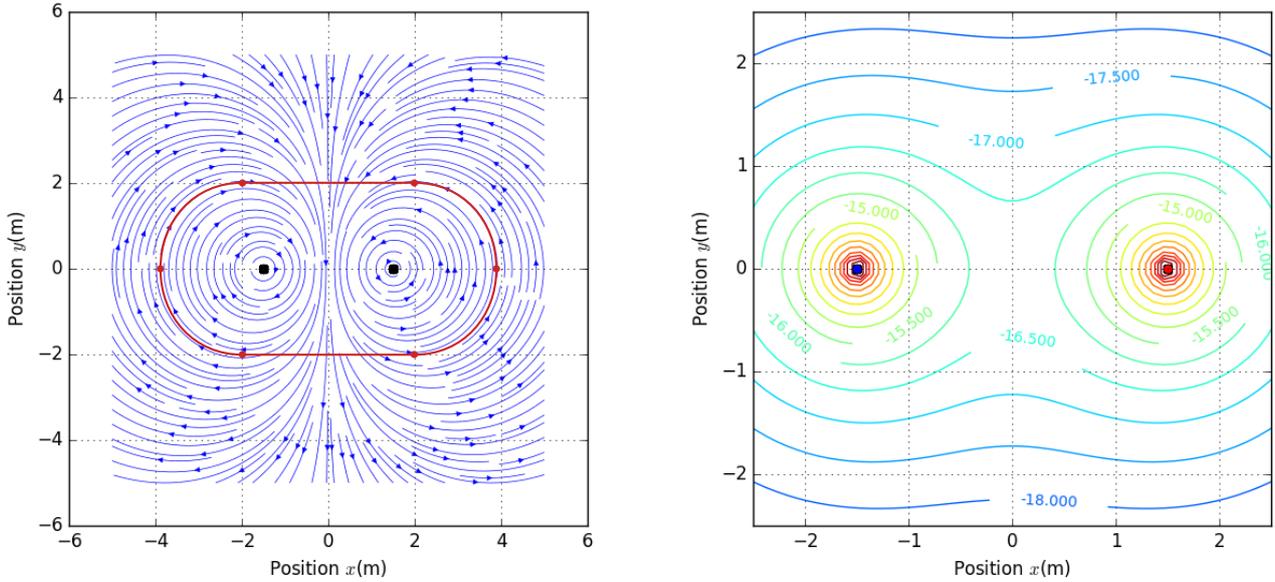


Fig. 15.3

1. Existe-t-il des plans de symétrie? d'anti-symétrie?
2. Dédurre de l'image de droite une relation entre  $i_d$  et  $i_g$ .
3. Dédurre de l'image de gauche la valeur de  $i_d$ , puis celle de  $i_g$ .

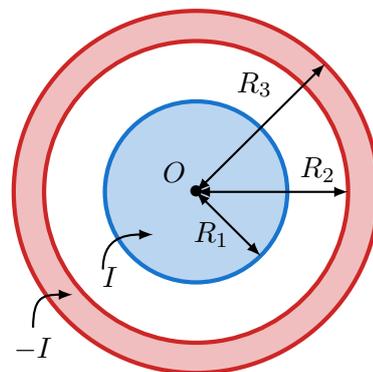
**15.1.3 Utilisation du théorème d'Ampère**

1. Calculer le champ magnétostatique en tout point  $M$  de l'espace généré par la distribution de courant suivante :
  - (a) Un fil rectiligne infini de rayon nul, parcouru par le courant  $I_0$ ,
  - (b) Un cylindre infini de rayon  $R$ , d'axe  $Oz$ , parcouru par la densité surfacique de courant  $\vec{j}_s = j_0 \vec{e}_z$  sur la surface définie par  $r = R$  en coordonnées cylindriques,

**15.2 Problèmes**

**15.2.1 Cylindres coaxiaux**

On considère un câble coaxial cylindrique de longueur supposée infinie, constitué d'un conducteur central plein de rayon  $R_1$ , parcouru par un courant uniforme d'intensité  $+I$  et d'un conducteur périphérique évidé, de rayon intérieur  $R_2$ , de rayon extérieur  $R_3$  avec  $R_1 < R_2 < R_3$  et parcouru par un courant uniforme également d'intensité  $-I$ . On note  $\vec{u}_z$  le vecteur directeur unitaire de l'axe commun des deux conducteurs. Soit un point  $M$  à une distance  $r$  de l'axe du câble .



1. Montrer que le champ magnétostatique  $\vec{B}(M)$  est orthoradial (colinéaire à  $\vec{u}_\theta$  en tout point  $M$  de l'espace.
2. Montrer qu'il peut se mettre sous la forme  $\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_\theta$  où  $B(r)$  est une fonction de  $r$  unique-

ment.

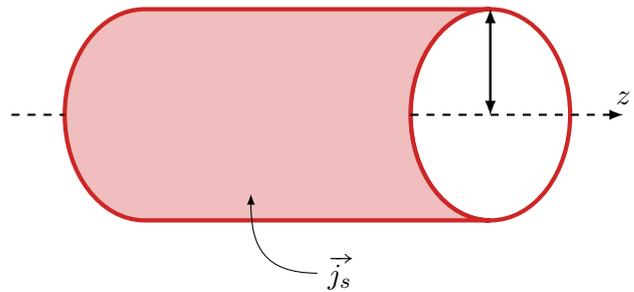
3. Préciser alors la forme des lignes de champ.
4. Montrer que le champ  $\vec{B}(M)$  créé au point  $M$  est nul si  $r > R_3$
5. Exprimer les densités de courant  $\vec{j}_{\text{int}}$  et  $\vec{j}_{\text{ext}}$ , respectivement du conducteur central et du conducteur périphérique, en fonction des courants  $I$  et des rayons  $R_1, R_2, R_3$ .
6. En appliquant le théorème d'AMPÈRE à un contour que l'on précisera, donner l'expression de la composante  $B(r)$  du champ magnétique créé en tout point  $M$  de l'espace en fonction de  $\mu_0, I, r, R_1, R_2, R_3$ .
7. Vérifier que le champ magnétostatique est continu en  $r = R_1$  et  $r = R_2$ .
8. Calculer le flux de  $\vec{B}$  à travers une section du câble à un angle  $\theta = \text{cste}$  de longueur  $H$ .

### Données :

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$$

### 15.2.2 Modèles divers de solénoïdes

On modélise un solénoïde par un cylindre infiniment long d'axe  $Oz$ , de rayon  $a$ , parcouru par une densité de courant surfacique  $\vec{j}_s = j_0 \vec{u}_\theta$  où  $\vec{u}_\theta$  est le vecteur unitaire orthoradial d'une base de projection cylindrique  $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ . On admettra que le champ magnétique est nul à l'extérieur d'un solénoïde infini.



1. Établir l'expression du champ magnétique  $\vec{B}(M)$  pour tout point  $M$  à l'intérieur du solénoïde.

Le courant surfacique est en réalité dû à un enroulement très serré d'un fil conducteur comportant  $n$  spires par unité de longueur et parcouru par un courant  $I_0$ .

2. En déduire l'expression de  $\vec{B}(M)$  à l'intérieur du solénoïde en fonction de  $\mu_0, n$  et  $I_0$ .

On considère cette fois un conducteur cylindrique de même rayon  $a$ , parcouru par une densité de courant surfacique  $\vec{j}_s = j_0 \vec{u}_z$  où  $\vec{u}_z$  est le vecteur unitaire axial d'une base de projection cylindrique  $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ .

3. Établir l'expression de  $\vec{B}(M)$  à l'intérieur du solénoïde en fonction de  $j_0$  puis de  $\mu_0, n$  et  $I_0$ .

On considère enfin le solénoïde réel de même rayon  $a$ , composé d'un enroulement hélicoïdal d'un fil conducteur tel que le vecteur courant surfacique  $\vec{j}_s$  forme un angle  $\alpha$  avec le vecteur  $\vec{u}_\theta$  que l'on modélise par  $\vec{j}_s = j_0 (\cos(\alpha) \vec{u}_\theta + \sin(\alpha) \vec{u}_z)$ .

4. Justifier que l'on puisse calculer le champ  $\vec{B}$  résultant en traitant chacune des sources séparément.
5. Donner l'expression du champ magnétique  $\vec{B}$  qui règne en tout point  $M$  de l'espace.

### 15.2.3 Faisceau de particules

On considère un faisceau homocinétique de particules chargées, de rayon  $R$  et infini le long d'un axe  $Oz$ . Les particules portent une charge  $q$  et se déplacent toutes à la même vitesse  $\vec{v}$  par rapport à un

référentiel galiléen. La densité volumique de particules est notée  $n$ .

On s'intéresse tout d'abord au champ magnétique.

1. Exprimer le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  dans le faisceau en fonction de  $n$ ,  $q$  et  $\vec{v}$ .
2. En déduire le champ magnétique  $\vec{B}(M)$  en tout point de l'espace.

On étudie ensuite le champ électrique.

3. Préciser l'expression de la densité volumique de charge  $\rho$  au sein du faisceau.
4. En déduire le champ électrique  $\vec{E}(M)$  en tout point de l'espace.
5. Proposer une relation vectorielle liant  $\vec{v}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  qui soit valable en tout point de l'espace. On pourra utiliser  $\varepsilon_0\mu_0c^2 = 1$ .
6. Reprendre les questions précédentes en vous plaçant dans le référentiel lié aux particules. Commenter.

## 15.3 Oral Banque PT

### 15.3.1 Pression hydrostatique et champ magnétique

On considère un fluide conducteur, au repos, placé dans un cylindre fermé de rayon  $R$  et de longueur  $L$  sur l'axe  $Oz$ , et parcouru par un courant  $I$  d'axe  $Oz$  également.

1. Calculer le champ magnétique à l'intérieur du fluide. Justifiez vos hypothèses. En déduire la force de LAPLACE qui s'exerce sur une volume mésoscopique de fluide.
2. La pression est supposée uniforme à l'extérieur et noté  $p_0$ . En déduire la variation de pression au sein du fluide, en considérant que la pression au sein du fluide en  $r = 0$  et  $z = 0$  est égale à  $p_0$ .

#### Données :

$$- \text{ En coordonnées cylindriques : } \overrightarrow{\text{grad}} p(r, \theta, z) = \frac{\partial p}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{u}_z$$

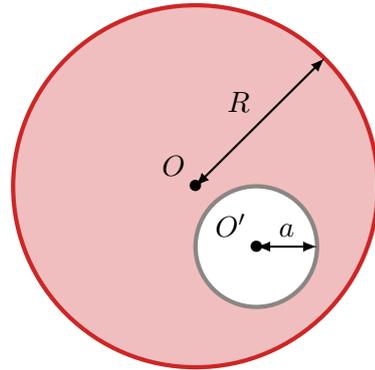
### 15.3.2 Puissance électromagnétique d'un conducteur

Soit un conducteur cylindrique de longueur  $L$  supposée infini, d'axe  $Oz$  et de rayon  $R$  et  $\vec{E}$  un champ électrique uniforme et stationnaire orienté selon  $\vec{u}_z$ .

1. Quel est le paramètre qui caractérise le caractère conducteur d'un matériau ? Quelle est son unité ? Connaissez-vous un ordre de grandeur ?
2. Quelle est l'intensité qui traverse ce cylindre ?
3. En déduire le champ magnétique en tout point de l'espace.
4. Quelle est la puissance électromagnétique dissipée par effet JOULE ?
5. Y a-t-il une puissance rayonnée à travers les parois du cylindre ? Faire un bilan de puissance.

### 15.3.3 Cylindre avec cavité

On considère un cylindre infini d'axe  $Oz$  de rayon  $R$  parcouru par un vecteur densité volumique de courant uniforme  $\vec{j} = j_0 \vec{e}_z$ . Ce cylindre est percé d'un autre cylindre d'axe  $O'z$  et de rayon  $a$ , avec  $a < R$ .



1. Calculer le champ magnétostatique généré par un cylindre infini, d'axe  $Oz$  et de rayon  $R$  parcouru par un vecteur densité volumique de courant uniforme  $\vec{j} = j_0 \vec{e}_z$ .
2. Par application du théorème de superposition, déterminer le champ magnétostatique dans la cavité et montrer qu'il s'exprime sous la forme  $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} \vec{j} \wedge \overrightarrow{OO'}$ .

## 15.4 Annales

### 15.4.1 Étude de divers capteurs

[2015 PT]

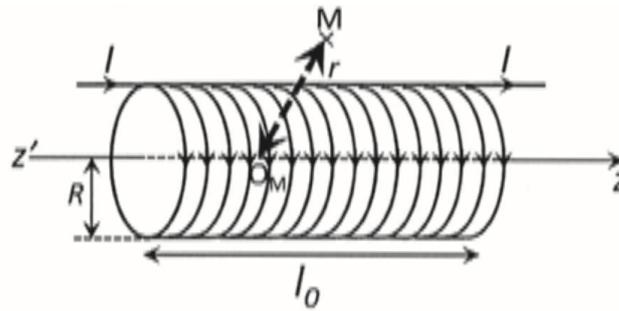
#### Étude d'un capteur inductif

Dans cette partie, on s'intéresse au fonctionnement d'un capteur inductif de déplacement. Le capteur utilise une bobine d'auto-induction. On s'intéresse dans un premier temps au champ magnétique créé par un solénoïde dans l'air, puis à partir de là au capteur lui-même, obtenu en insérant une partie mobile à l'intérieur du solénoïde.

1. On considère un solénoïde de longueur  $l_0$  et de rayon  $R$  recouvert de  $N$  spires jointives bobinées sur un cylindre rempli d'air, dans lesquelles circule un courant électrique d'intensité  $I$  (Fig. 15.4). On considérera que les propriétés magnétiques de l'air sont celles du vide et que le champ magnétique sur l'axe du solénoïde est donné en norme par la relation  $B = \mu_0 \frac{N}{l_0} I$ . Tous les calculs de champ magnétique seront menés dans l'approximation du solénoïde illimité.

Les données sont :  $R$ ,  $N$ ,  $I$ ,  $\mu_0$  et  $l_0$ .

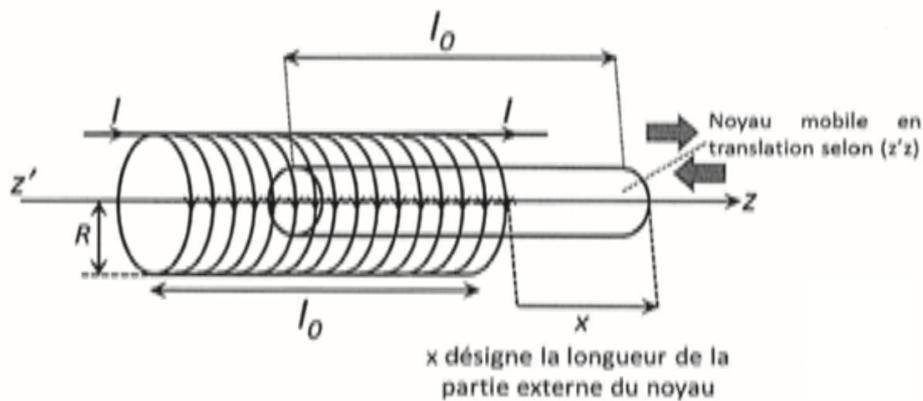
- (a) Donner l'énoncé du théorème d'Ampère.
  - (b) Donner l'allure des lignes de champ magnétique d'un solénoïde de longueur  $l_0$  (les directions et sens de ces lignes seront justifiées).
  - (c) Démontrer que le champ magnétique à l'extérieur du solénoïde est nul (modèle du solénoïde illimité).
  - (d) A partir du théorème d'Ampère, déterminer complètement le champ magnétique en tout point intérieur au solénoïde.
  - (e) En déduire l'expression littérale du coefficient d'auto-inductance  $L_0$  du solénoïde, après en avoir rappelé la définition générale.
2. Le capteur étudié est représenté sur la Fig. 15.5. Une partie mobile de longueur  $l_0$ , appelée noyau, peut se déplacer en translation à l'intérieur du solénoïde initialement rempli d'air. Pour la suite de l'étude, nous admettrons les résultats suivants :
    - L'insertion d'un noyau à l'intérieur d'un solénoïde conduit à une modification de son coefficient d'auto-inductance : l'inductance en présence du noyau est le produit de l'inductance dans l'air par un facteur multiplicatif  $\delta$  ( $\delta \gg 1$ ).
    - Le coefficient d'auto-inductance du capteur peut être évalué comme celui résultant de la mise



**Fig. 15.4** – Solénoïde de longueur  $l_0$ , constitué de  $N$  spires jointives bobinées sur un cylindre de rayon  $R$  rempli d'air, dans lesquelles circule un courant  $I$  et étudié dans l'approximation du solénoïde infini.  $r$  désigne la distance à l'axe d'un point  $M$  au niveau duquel on cherche à évaluer le champ  $B$ .

en série de deux solénoïdes :

- Le premier, de longueur  $x$ , est rempli d'air.
- Le deuxième de longueur  $l_0 - x$ , contient le noyau.



**Fig. 15.5** – Capteur magnétique à insertion d'un noyau au sein du solénoïde de la fig15.4 initialement rempli d'air

- (a) Déterminer en fonction de  $N$ ,  $l_0$  et  $x$ , le nombre  $N_1$  de spires de la partie gauche du solénoïde sans noyau et celui ( $N_2$ ) de la partie droite avec le noyau interne.
- (b) En déduire l'inductance propre de chaque partie puis l'inductance  $L(x)$  en fonction de  $\delta$ ,  $L_0$ ,  $l_0$  et  $x$ .
- (c) Représenter graphiquement  $L(x)$  en fonction de  $x$  si  $0 < x < l_0$ .