Table des matières

17 Propagation d'ondes électromagnétiques

17.1 Exercices d'application

17.1.1 Nature d'une onde

Pour chacune des formes mathématiques d'ondes proposées ci-dessous, préciser si elles sont planes, progressives (si oui, donner leur direction de propagation), sinusoïdales, ainsi que leur éventuelle polarisation.

1. $\vec{E}(M,t) = E_0 \cos(\omega t - ky)\,\vec{u_x}$.
2. $\vec{E}(M,t) = E_0 \cos(\omega t - k_1 x + k_2 y)\,\vec{u_z}$.
3. $\vec{E}(M,t) = E_0 \mathrm{e}^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta)\,\vec{u_y}$.

Soit une onde plane, progressive de vecteur d'onde $\vec{k} = k_x\vec{u_x} + k_y\vec{u_y}$, d'amplitude E_0 et polarisée rectilignement selon $\vec{u_z}$.

4. Établir son expression mathématique ainsi que celle du champ magnétique $\vec{B}$ associé.
5. En déduire l'expression de l'onde régressive associée.

17.1.2 Structure d'une onde dans un conducteur ohmique

On a montré que, dans un conducteur ohmique, le champ électrique $\vec{E}$ prend la forme suivante :

$$\vec{E}(M,t) = E_0 \mathrm{e}^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\vec{u_x}$$

1. Le champ électrique est-il celui d'une onde plane ? progressive ? harmonique ? Quel est son état de polarisation ?
2. Rappeler le nom et le sens physique de δ.
3. Donner l'expression du champ électrique complexe $\underline{\vec{E}}(z,t)$ associé à cette onde. En déduire l'expression du vecteur d'onde complexe $\underline{\vec{k}}$.
4. Calculer alors le champ magnétique complexe $\underline{\vec{B}}(z,t)$ et en déduire que le champ magnétique réel peut se mettre sous la forme

$$\vec{B}(M,t) = \frac{\sqrt{2}E_0}{2\omega\delta}\mathrm{e}^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right)\vec{u_y}$$

5. Comparer la structure de cette onde électromagnétique à celle d'une OPPS dans le vide.

17.1.3 Relation de dispersion d'un plasma peu dense

L'ionosphère qui entoure la Terre peut être modélisée par un plasma peu dense dans lequel les charges mobiles sont à la fois des cations M^+ et des électrons e^-. Lorsque ces charges sont soumises à une onde électromagnétique incidente, du fait de la faiblesse du champ magnétique et du rapport de masse entre les cations et les électrons, on peut considérer que le vecteur densité de courant obéit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m}\vec{E}$$

où n est la densité volumique d'électron en m^{-3}, e est la charge élémentaire et m la masse d'un électron.

1. Établir la relation de dispersion d'une onde électromagnétique dans le plasma, dans le cadre de l'ARQS.
2. En déduire une contrainte portant sur la pulsation ω pour qu'une OPPS puisse se propager dans le plasma.
3. À quel type de filtre peut-on assimiler le plasma vis-à-vis des ondes électromagnétiques ?

17.2 Problèmes

17.2.1 Découpe laser

On étudie le champ électromagnétique d'un laser industriel à CO_2 de longueur d'onde $\lambda = 1{,}06\,\mu\mathrm{m}$, de puissance moyenne $P = 0{,}5\,\mathrm{kW}$ et de section $s = 0{,}6\,\mathrm{mm}^2$. On modélise grossièrement le champ électromagnétique du faisceau par une onde plane progressive se propageant selon l'axe Oz, et on note $\vec{E}(z,t)$ le champ électrique associé à l'onde, avec :

$$\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(\omega t - kz)\,\vec{u_x}$$

1. Décrire l'état de polarisation de l'onde et calculer le champ magnétique $\vec{B}(z,t)$.
2. Calculer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}(z,t)$ de cette onde laser, ainsi que sa valeur moyenne $\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle$.
3. Donner l'expression littérale, en fonction de P et de s, de l'amplitude E_0 du champ électrique. Calculer numériquement E_0.

Ce faisceau est utilisé pour la découpe de plaques métallique d'épaisseur $e = 5\,\mathrm{mm}$. Le faisceau se propage perpendiculairement à la plaque. On admettre que l'énergie du faisceau laser est intégralement absorbée par la métal irradié, et on néglige tout phénomène de conduction thermique, ainsi que tout échange thermique avec l'air ambiant. L'énergie absorbée provoque, en particulier, le chauffage puis la fusion du métal permettant ainsi la découpe de la plaque.

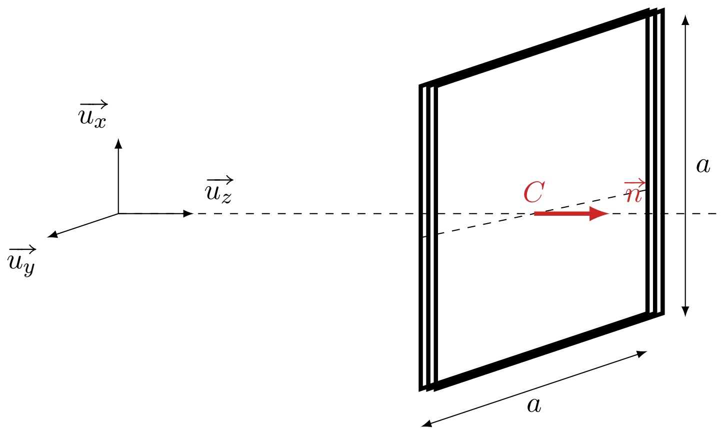
4. Quelle énergie $\mathrm{d}\mathcal{E}$ faut-il fournir à un cylindre de métal de section s et d'épaisseur $\mathrm{d}e$ (et de masse $\mathrm{d}m$), initialement à $T_0 = 300\,\mathrm{K}$, pour le faire fondre ?
5. Déterminer une relation entre P, $\mathrm{d}\mathcal{E}$ et le temps $\mathrm{d}t$ qu'il faut au laser pour faire fondre un tel cylindre.
6. En déduire la vitesse V de progression du faisceau laser à travers la plaque. Faire l'application numérique.

Données :

- permittivité du vide : $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi}10^{-9}\ \mathrm{F\cdot m^{-1}}$,
- masse volumique du métal : $\mu = 7{,}88 \times 10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$,
- capacité thermique massique du métal : $c = 450\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$,
- enthalpie massique de fusion du métal : $\ell_f = 270\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$,
- température de fusion du métal : $T_f = 1800\,\mathrm{K}$.

17.2.2 Détecteur d'onde électromagnétique

Un émetteur situé à l'origine d'un repère cartésien $(Oxyz)$, envoie une onde électromagnétique plane monochromatique, de vecteur d'onde $\vec{k}$ et de pulsation ω. Cette onde est polarisée rectilignement selon l'axe Ox et se propage selon l'axe Oz dans le sens des z croissants. L'origine des phases sera prise en O et à $t = 0$. Un récepteur, formé de N spires carrées de côté a, se trouve à une distance $z_C = 100\,\text{km}$ de l'émetteur. L'amplitude du champ électrique au niveau du récepteur est $E_0 = 3 \times 10^{-3}\,\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$.



1. Établir l'équation de propagation du champ électrique $\vec{E}$. En déduire l'équation de dispersion de cette onde (c'est-à-dire la relation reliant k, ω et c).
2. Donner l'expression du champ $\vec{E}(M,t)$ et en déduire celle de $\vec{B}(M,t)$ en fonction de E_0, c, ω et k.
3. Expliquer le principe de fonctionnement du récepteur. En déduire l'orientation du vecteur $\vec{n}$ normal au cadre pour une réception optimale.
4. En tenant compte de la **dépendance temporelle et spatiale** des champs, établir l'expression littérale de l'intégrale permettant de calculer le flux du champ $\vec{B}$ à travers le détecteur.
5. On donne $\lambda = 1829\,\text{m}$ et $a = 10\,\text{cm}$, en déduire que la force électromotrice mesurée par le détecteur est
$$u = kNa^2E_0\sin(\omega t - kz_C)$$
6. Donner l'expression littérale du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ et de sa valeur moyenne temporelle au point C ($x_C = 0\,;\, y_C = 0\,;\, z_C$).
7. On suppose que l'émetteur rayonne de manière isotrope et on néglige toute absorption pendant la propagation. Évaluer littéralement, puis numériquement la puissance moyenne $\mathcal{P}_e$ de l'émetteur dans ces hypothèses.

17.2.3 Onde électromagnétique dans un plasma dilué

Un plasma dilué est composé d'électrons, et d'ions dont la vitesse est négligeable. On note n la densité volumique d'électrons et m la masse d'un électron. On s'intéresse à une onde électromagnétique plane, progressive, monochromatique de pulsation ω, de vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{e_z}$, et d'amplitude $E_0 = E_0\vec{e_x}$ en notation complexe. On note j le nombre complexe tel que $\mathrm{j}^2 = -1$.

1. Exprimer le champ électrique de l'onde en notation complexe. Que dire du trièdre $(\vec{k},\ \vec{E},\ \vec{B})$?
2. En s'appuyant sur les équations de Maxwell, calculer le courant volumique $\underline{\vec{j}}$ en fonction de $\underline{\vec{E}}$. On admettra que le plasma demeure localement neutre.
3. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à un électron, montrer que $\underline{\vec{j}} = \mathrm{j}\alpha\underline{\vec{E}}$. En déduire l'expression de α.

On admettra que l'amplitude de la partie magnétique de la force de Lorentz est négligeable devant la partie électrique de cette même force.

4. Établir la relation de dispersion entre ω et k en fonction de $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}}$. Tracer la courbe $k(\omega)$. Pour quelles valeurs de ω l'onde électromagnétique peut-elle se propager dans le plasma ? On se place dans ce cas de figure pour la suite de l'exercice.
5. Calculer la moyenne temporelle du vecteur de POYNTING $\left\langle \overrightarrow{\Pi} \right\rangle$.
6. Calculer la moyenne temporelle de la la densité volumique d'énergie électromagnétique.

Données :

$\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$.

17.3 Oral Banque PT

17.3.1 Blocage d'appel téléphonique

Un téléphone émet un appel qui est reçu par un second téléphone. On place un plaque métallique tout autour du second téléphone qui ne reçoit plus l'appel. On modélise la composante électrique de l'onde électromagnétique par $\underline{\overrightarrow{E}} = E_0 \cos(\omega t - \underline{k} z)\,\overrightarrow{u_x}$.

1. Donner l'ordre de grandeur de la fréquence d'une onde téléphonique.
2. Établir l'équation différentielle de propagation du champ $\overrightarrow{E}$ dans le métal.
3. Comparer cette équation avec celle dans le vide et commenter.
4. Résoudre l'équation de propagation dans le métal.
5. Mettre en évidence une distance caractéristique et la calculer.

Données :

- $\gamma = 4 \times 10^7\,\mathrm{S \cdot m^{-1}}$
- $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ \mathrm{H \cdot m^{-1}}$

17.3.2 Propagation d'ondes électromagnétiques dans l'eau de mer

Une onde électromagnétique se propage dans de l'eau de mer de conductivité électrique σ.

1. Établir l'équation de diffusion d'une onde électromagnétique dans un milieu conducteur.
2. À quelle(s) condition(s) peut on négliger le courant de déplacement ?
3. Résoudre l'équation de diffusion en négligeant le courant de déplacement.
4. Expliquer pourquoi les sous-marins communiquent avec des ondes très basses fréquences. Quel est l'inconvénient ?

Données :

$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{X}\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\,\overrightarrow{X}\right) - \Delta\overrightarrow{X}$

$\sigma \simeq 5\,\mathrm{S \cdot m^{-1}}$; $\varepsilon_0\varepsilon_r = \frac{80}{36\pi.10^9}\ \mathrm{F \cdot m^{-1}}$

17.3.3 Profondeur de peau

On considère un conducteur électrique semi-infini, occupant le demi-espace $z > 0$, de conductivité γ et soumis à un champ électrique :

$$\vec{E} = E_0 \mathrm{e}^{-\alpha z} \cos(\omega t - \alpha z) \vec{u_x}$$

1. S'agit-il d'une onde plane ? D'une onde progressive ? D'une onde harmonique ? Que représente α ? Quelles sont la direction et le sens de propagation ? La polarisation ?
2. Écrire le champ $\vec{E}$ en notation complexe. En déduire le champ $\vec{B}$ associé.
3. Exprimer le vecteur de Poynting, puis sa moyenne temporelle. Dans quelle direction est rayonnée l'énergie électromagnétique ?
4. Effectuer un bilan de puissance pour une tranche de conducteur de surface S et de longueur $\mathrm{d}z$. Déterminer la puissance par unité de volume cédée par rayonnement dans le conducteur.
5. Établir une autre expression de la puissance cédée aux porteurs de charge partir de la loi d'Ohm locale.
6. Á partir des deux expressions obtenues, déduire la distance sur laquelle pénètre l'onde avant d'être atténuée.

Données :

On rappelle que $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$.

17.4 Annales

17.4.1 Communication avec la Terre [2015 E3A MP]

D'après Sciences et Avenir, 12 septembre 2104 :

« Loin des yeux mais pas loin du cœur. La sonde Rosetta a beau naviguer dans l'espace à plus de 400 millions de kilomètres de la Terre, elle donne de ses nouvelles en permanence aux équipes de l'agence spatiale européenne. « En ce moment, elle communique 24 heures sur 24 afin de transmettre toutes les données qu'elle recueille sur la comète 67P/Tchourioumov-Guérassimenko », précise Sylvain Lodiot, responsable ESA des opérations sur Rosetta.

Envoyées par ondes radio sur deux fréquences (proches de 8 GHz), les informations mettent aujourdh'ui 20 minutes environ à nous parvenir et sont captées par plusieurs stations de l'ESA et de la NASA situées en Australie, en Espagne, en Argentine et aux Etats-Unis. »

Propagation dans le vide

On se propose d'étudier la propagation des ondes électromagnétiques entre la sonde Rosetta et la Terre, dans le vide.

Données :

- $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{E}) - \Delta\vec{E}$;
- vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3{,}00 \times 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

1. Rappeler les équations de Maxwell en présence de charges et de courants. Comment se simplifient-elles dans le vide ?

2. Établir l'équation de propagation dans le vide vérifiée par le champ électrique $\overrightarrow{E}$. Donner celle vérifiée par le champ magnétique $\overrightarrow{B}$.
3. En déduire la célérité c des ondes électromagnétiques dans le vide, en fonction de ε_0 et μ_0.

On considère une onde électromagnétique, pour laquelle le champ électrique en coordonnées cartésiennes s'écrit :

$$\overrightarrow{E} = E_x \cos\left(\omega(t - z/c)\right) \overrightarrow{e_x} + E_z \cos\left(\omega(t - z/c)\right) \overrightarrow{e_z}$$

4. Dans quelle direction se propage cette onde ? Comment peut-on la qualifier ?
5. Exprimer son nombre d'onde k en fonction de ω et c.
6. Simplifier l'expression proposée du champ électrique, à l'aide de l'équation de Maxwell-Gauss.
7. Le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ associé s'écrit :

$$\overrightarrow{B} = B_x \cos\left(\omega(t - z/c)\right) \overrightarrow{e_x} + B_y \cos\left(\omega(t - z/c)\right) \overrightarrow{e_y} + B_z \cos\left(\omega(t - z/c)\right) \overrightarrow{e_z}$$

   Déterminer les constantes B_x, B_y, B_z en fonction de E_x, c.
8. Cette onde est-elle transversale ou longitudinale ?
9. Exprimer le vecteur de Poynting $\overrightarrow{\Pi}$ associé à cette onde. Calculer sa valeur moyenne en fonction de E_x, μ_0, c et rappeler sa signification physique et commenter sa direction.

Réception du signal

10. Au moment du largage de Philae, le délai de communication entre Rosetta et la Terre est de 28 minutes et 20 secondes. Calculer la distance entre la Terre et la comète à cet instant.

Les deux canaux attribués à la sonde Rosetta pour communiquer avec la Terre sont $f_1 = 8421{,}79\,\text{MHz}$ et $f_2 = 8423{,}15\,\text{MHz}$. Pour déterminer la vitesse relative v de la comète par rapport à la Terre (la comète se rapproche de la Terre), on mesure la fréquence f' du signal reçu, correspondant à la fréquence d'émission f (on assimile la vitesse de la comète à celle de Rosetta).

11. On considère qu'à l'instant t_0, la comète se situe à la distance L de la Terre. Le signal sinusoïdal émis est alors maximum. Déterminer l'instant t'_0 correspondant à l'arrivée de ce maximum sur la Terre.
12. Exprimer, en fonction de t_0 et f, l'instant t_1 auquel sera émis le maximum suivant du signal. En déduire la distance L' qu'il lui faut parcourir pour atteindre la Terre, puis la date t'_1 correspondant à l'arrivée de ce second maximum sur Terre.
13. Déterminer la période T' qui sépare l'arrivée sur Terre des deux maximums successifs d'une sinusoïde de fréquence f émise par Rosetta. En déduire, au 1$^{\text{e}}$ ordre en v/c, $f' = f(1 + v/c)$.
14. Calculer numériquement la vitesse v de la comète sachant que $f'_1 = 8422{,}29\,\text{MHz}$, puis déterminer la fréquence f'_2 correspondant à un signal émis de fréquence f_2.

Prise en compte de l'ionosphère

Pour atteindre la surface de la Terre, les ondes électromagnétiques émises par Rosetta doivent traverser l'atmosphère. Celle-ci peut être assimilée au vide en ce qui concerne la propagation des ondes électromagnétiques, à l'exception d'une couche située entre 60 km et 800 km d'altitude : l'ionosphère.
Sous l'influence du rayonnement solaire, le gaz présent dans l'ionosphère se comporte comme un plasma, contenant des ions positifs (masse m_p et charge $+e$) et des électrons (masse m_e et charge $-e$), avec une densité volumique n.
Les charges sont soumises à l'action de l'onde électromagnétique. Celle-ci est décrite par : $\overrightarrow{E} = E_x \cos\left(\omega(t - z/c)\right) \overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{B} = \frac{E_x}{c} \cos\left(\omega(t - z/c)\right) \overrightarrow{e_y}$.

En notation complexe, $\underline{\overrightarrow{E}} = E_x \exp\left(\mathrm{j}(\omega t - kz)\right) \overrightarrow{e_x}$ et $\underline{\overrightarrow{B}} = \frac{E_x}{c} \exp\left(\mathrm{j}(\omega t - kz)\right) \overrightarrow{e_y}$.

15. Exprimer la force de LORENTZ qui s'exerce sur une charge q qui se déplace à la vitesse $\overrightarrow{v}$ et préciser pourquoi il est possible de négliger la composante magnétique devant la composante électrique.
16. On note respectivement $\overrightarrow{v_p}$ et $\overrightarrow{v_e}$ les vitesses des ions positifs et des électrons. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à chacun des porteurs de charge pour exprimer les grandeurs complexes $\underline{\overrightarrow{v_p}}$ et $\underline{\overrightarrow{v_e}}$ (le poids est négligé devant la force électrique).
17. En déduire la densité volumique de courant $\underline{\overrightarrow{j}}$ dans le plasma et indiquer pourquoi on peut simplifier son expression et écrire : $\underline{\overrightarrow{j}} = -\mathrm{j}\frac{ne^2}{\omega m_e}\underline{\overrightarrow{E}}$.
18. Écrire l'équation de MAXWELL-AMPÈRE dans le plasma sous la forme

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\underline{\overrightarrow{B}} = \varepsilon_0\mu_0\left(1 - \frac{{\omega_p}^2}{\omega^2}\right)\frac{\partial\underline{\overrightarrow{E}}}{\partial t}$$

    où ω_p est une constante à exprimer en fonction de n, e, m_e et ε_0.
19. Établir l'équation de propagation alors vérifiée par le champ électrique. En déduire l'expression de k^2, en fonction de c, ω_p et ω. Comment cette relation est-elle nommée ?
20. Que se passe-t-il pour $\omega < \omega_p$?
21. Pour $\omega > \omega_p$, exprimer la vitesse de phase v_ϕ et la vitesse de groupe v_g. Commenter.
    On donne $v_\phi = \frac{\omega}{k}$ et $v_g = \frac{d\omega}{dk}$. Ces deux notions sont hors-programme dans la filière PTSI/PT.
22. Simplifier les deux expressions pour $\omega \gg \omega_p$. Commenter le choix des fréquences f_1 et f_2 pour assurer la communication entre ROSETTA et la Terre, sachant que $\omega_p \simeq 1 \times 10^7\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ pour l'ionosphère terrestre.