

Table des matières

1	Thermodynamique différentielle	2
1.1	Exercices d'application	2
1.1.1	Fonction d'état énergie interne U	2
1.1.2	Étude thermique d'un verre d'eau	2
1.1.3	Expression de l'entropie d'un gaz parfait	2
1.1.4	Expression de l'isobare d'un gaz parfait en diagramme Ts	2
1.2	Problèmes	3
1.2.1	Contact thermique entre deux solides	3
1.2.2	Calculs des coefficients thermoélastiques d'un gaz parfait	3
1.2.3	Transformations polytropiques	4
1.2.4	Fonction d'état d'un câble métallique	4
1.3	Oral Banque PT	5
1.3.1	Canon à neige.....	5
1.4	Problèmes ouverts	5
1.4.1	Durée de vie d'un processeur.....	5
1.4.2	Une tasse de thé?	6
1.5	Annales	6
1.5.1	Cycle infinitésimal d'une pompe à chaleur	6
1.5.2	Coordonnées d'AMAGAT.....	8

1.1 Exercices d'application

1.1.1 Fonction d'état énergie interne U

1. Rappeler l'expression de la fonction d'état énergie interne d'un gaz parfait U_{GP} en fonction de la température T .
2. La fonction d'état énergie interne d'un gaz de VAN DER WALLS s'écrit $U_{\text{vdW}} = U_{\text{GP}} - \frac{n^2 a}{V}$ où n est le nombre de mole et a une constante qui dépend du gaz considéré. En déduire la différentielle dU_{vdW} .
3. Simplifier la différentielle dU_{vdW} dans le cas d'une transformation isochore appliquée à un système fermé.

1.1.2 Étude thermique d'un verre d'eau

On considère un verre rempli d'eau de capacité thermique C et de température $T(t)$, initialement placé à la température $T(t=0) = T_0$. La pression ambiante est constante et vaut $P_{\text{ext}} = P_0$.

On modélise la puissance thermique échangée entre le verre rempli d'eau et le milieu extérieur par la relation $\mathcal{P} = \alpha (T(t) - T_{\text{ext}})$ où $\alpha = \text{cste} > 0$ et T_{ext} est la température extérieure.

1. Quelle hypothèse raisonnable peut-on faire sur le volume d'eau dans le verre ?
2. Quel est le signe de l'énergie thermique reçue par le système $\{\text{eau+verre}\}$ si $T_0 > T_{\text{ext}}$?
3. Déduire du premier principe de la thermodynamique l'équation différentielle vérifiée par T puis sa loi horaire $T(t)$.

1.1.3 Expression de l'entropie d'un gaz parfait

Soit un système fermé, composé d'un nombre de mole n d'un gaz parfait de capacité thermique à volume constant C_v , et subissant une transformation quelconque.

1. En utilisant la première identité thermodynamique, établir l'expression de sa fonction entropie en fonction des variables d'état V, T et des propriétés thermodynamiques C_v, n, R en prenant pour référence la valeur $S(T = T_0, V = V_0) = S_0$.
2. En déduire qu'un gaz parfait subissant une transformation isentropique vérifie la loi de LAPLACE.

1.1.4 Expression de l'isobare d'un gaz parfait en diagramme Ts

Le diagramme Ts , aussi appelé « diagramme entropique », permet de tracer la température T en fonction de l'entropie massique.

1. Rappeler l'expression de l'identité thermodynamique exprimant la différentielle de h en fonction de ses variables naturelles.
2. Rappeler l'expression de la seconde loi de JOULE appliquée à l'enthalpie massique et en déduire l'équation d'une isobare $P = P_0$ en diagramme Ts .

1.2 Problèmes

1.2.1 Contact thermique entre deux solides

On considère deux solides, indéformables, de capacités thermiques respectives C_1 et C_2 et de températures initiales respectives T_1 et T_2 .

Ces deux solides sont mis en contact thermique, c'est-à-dire qu'ils sont placés côte à côte dans une enceinte vide dont les parois sont athermanes. On supposera que C_1 et C_2 sont constantes dans le domaine de température considéré et que les transformations subies par les solides sont infiniment lentes et mécaniquement réversibles.

1. Rappeler l'expression de la différentielle de la fonction d'état énergie interne d'une phase condensée.
2. Exprimer la température d'équilibre T_f des deux solides. Que vaut-elle si $C_1 \gg C_2$, comment qualifie-t-on le solide S_1 dans ce cas ?
3. On s'intéresse au cas où $C_1 = C_2$. Déduire de la question précédente la température T_f . Exprimer alors la variation d'entropie du système constitué des deux solides. À quelle condition cette transformation peut-elle est réversible ?

1.2.2 Calculs des coefficients thermoélastiques

L'un des objectifs de l'étude thermodynamique d'un système est celle de la détermination de son équation d'état. Par exemple, pour établir l'équation d'un gaz parfait, il faut une enceinte permettant de fixer T et n , faire varier p et mesurer V , puis recommencer en effectuant une permutation circulaire de ces paramètres. Si une équation en ressort, c'est l'équation d'état recherchée, sinon on regroupe les grandeurs dans des tables thermodynamiques comme COOLPAK¹.

Pour permettre ce travail expérimental et comparer des systèmes entre eux, on définit un ensemble de coefficients intensifs, appelés coefficients thermodynamiques, que l'on se propose d'étudier ici.

1. Rappeler l'équation d'état d'un gaz parfait.
2. On définit le coefficient de compressibilité isotherme $\chi_T = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} \Big|_{T,n}$. Établir l'expression de χ_T pour un gaz parfait.
3. On définit le coefficient de dilatation isobare $\alpha_p = \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial T} \Big|_{p,n}$. Établir l'expression de α_p pour un gaz parfait.
4. On définit le coefficient de compression isochore $\beta_V = \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial T} \Big|_{V,n}$. Établir l'expression de β_V pour un gaz parfait.
5. Ces trois coefficients sont-ils indépendants ?

Dans le cas d'un liquide, on admettra que ces coefficients prennent des valeurs constantes $\alpha_p \simeq 3 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ et $\chi_T \simeq 5 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$.

6. On cherche maintenant à établir l'équation d'état de ce liquide à l'aide des coefficients thermodynamiques.
 - (a) Montrer que $\ln V = \alpha_p T + A(p)$ où $A(p)$ est une fonction de p inconnue à ce stade.
 - (b) Montrer alors que $A = \chi_T p + B$ où B est une constante.
 - (c) En prenant pour référence le volume $V_0(p = p_0, T = T_0)$, en déduire l'équation d'état du fluide.
7. Quelle est la surpression caractéristique d'évolution du volume V ?
8. Faire de même pour l'élévation caractéristique de température.

1. cf. <http://www.en.ipu.dk/Indhold/refrigeration-and-energy-technology/coolpack.aspx>

Une mole d'eau liquide est enfermée dans une bouteille métallique indéformable dans laquelle sa température passe de $T_1 = 293 \text{ K}$ à $T_2 = 593 \text{ K}$ sans changement d'état.

9. Calculer la variation de pression régnant dans la bouteille.

1.2.3 Transformations polytropiques

On s'intéresse à l'évolution d'un gaz parfait subissant une transformation *polytropique*. Une telle transformation peut être modélisée par la relation suivante : $Tds = cdT$, où s est l'entropie massique, T la température thermodynamique, et c est la capacité thermique massique vraie de l'évolution (elle peut donc être différente de c_v ou c_p). On note par ailleurs c_p et c_v les capacités thermiques à pression et volume constant massiques ainsi que $r = \frac{R}{M}$.

1. En utilisant une identité thermodynamique, montrez que l'évolution polytropique d'un gaz parfait obéit à l'équation différentielle :

$$(c - c_p) \frac{dT}{T} = -r \frac{dp}{p}$$

2. En utilisant la loi de MAYER, montrez que cette équation s'intègre sous la forme $pv^k = \text{cste}$ où v est le volume massique. Exprimer la valeur de k en fonction de c_p , c_v , c .
3. Quelles valeurs faut-il donner à k pour que l'évolution polytropique représente :
- une isobare,
 - une isentropique,
 - une isochore,
 - une isotherme.
4. En déduire les valeurs respectives de c .

1.2.4 Fonction d'état d'un câble métallique

On s'intéresse à la thermodynamique d'un système fermé particulier : un câble métallique. La pression et la température du milieu extérieur sont constantes et égales à P_0 et T_0 . Le câble a une section constante S , une longueur à vide L_0 mesurée à $T = T_0$ et $P = P_0$. Lorsqu'il est soumis à une force de traction F d'intensité constante exercée le long de son axe, il acquiert une longueur L et une température T . L'état d'équilibre du câble est donc caractérisé par les trois variables : T , F et L entre lesquelles existe une relation que nous allons établir.

On a par ailleurs établi expérimentalement les coefficients thermoélastiques suivants :

- coefficient de dilatation linéaire à traction constante : $\lambda = \frac{1}{L} \left. \frac{\partial L}{\partial T} \right|_F$,
- module d'élasticité isotherme (module d'YOUNG) : $E = \frac{L}{S} \left. \frac{\partial F}{\partial L} \right|_T$.

1. Exprimez la différentielle dL en fonction de λ , L , S , E , dT et dF .
2. En choisissant un état de référence judicieux, en déduire l'équation d'état d'un câble métallique : $L(T, F)$,
3. En supposant ΔT et ΔF petits devant une grandeur que l'on définira, montrez que l'on a alors : $L(T, F) \simeq L_0 \left(1 + \lambda(T - T_0) + \frac{F}{ES} \right)$,
4. On se place à $T = T_0$, montrez enfin que dans ces conditions : $F = k(L(T_0, F) - L_0)$ en exprimant k en fonction de S , E et L_0 . Que représente cette grandeur ?

1.3 Oral Banque PT

1.3.1 Canon à neige

La neige artificielle est obtenue en pulvérisant de fines gouttes d'eau liquide à $T_0 = 10\text{ °C}$ dans l'air ambiant à $T_e = -15\text{ °C}$. Leur déplacement dans l'air ambiant les soumet à une perte thermique que l'on modélise à travers la loi de NEWTON :

$$d\phi = h(T - T_e)dS$$

où $d\phi$ est la puissance cédée par la goutte d'eau, T sa température, h un coefficient constant et dS la surface à travers a lieu l'échange.

1. En supposant la goutte indéformable et à l'équilibre mécanique, établir la relation

$$\mu c_p R \frac{dT}{dt} = -3h(T - T_e)$$

2. En déduire que $\frac{T-T_e}{T_0-T_e} = e^{-t/\tau}$ et exprimer τ en fonction de μ , R , c_p et h . En déduire l'instant t_1 au bout duquel la goutte d'eau de rayon R atteint une température de $T_1 = -5,0\text{ °C}$.
3. Lorsque la goutte atteint T_1 , le phénomène de surfusion cesse : la goutte se solidifie partiellement. Calculer la fraction massique x de liquide restant à solidifier en supposant la transformation très rapide et adiabatique.
4. Au bout de combien de temps la goutte est-elle totalement solidifiée ?

Données :

- rayon de la goutte d'eau $R = 0,20\text{ mm}$,
- coefficient convectif $h = 65\text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$,
- masse volumique de l'eau liquide $\mu = 1,0 \times 10^3\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$,
- capacité thermique massique de l'eau liquide $c_p = 4,2 \times 10^3\text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$,
- enthalpie massique de fusion de la glace $\ell_{\text{fus}} = 330\text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

1.4 Problèmes ouverts

1.4.1 Durée de vie d'un processeur

Un processeur de micro-ordinateur, dont les dimensions sont fournies en figure 1.1, est mis en fonctionnement sans dissipateur thermique, ni système de refroidissement additionnel.

On lui ajoute dans un deuxième temps, un dissipateur thermique en aluminium dont les dimensions sont fournies en figure 1.1.

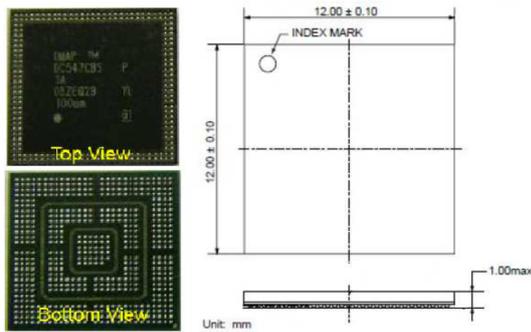


Fig. 1.1 – Processeur

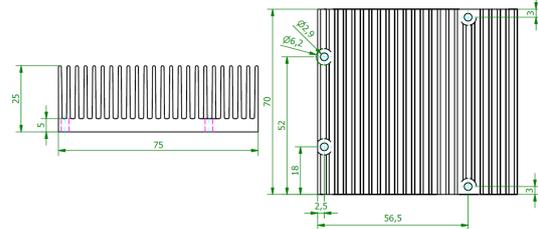


Fig. 1.2 – Dissipateur thermique

1. En modélisant ce problème physique de manière aussi fidèle que possible et en choisissant des valeurs numériques pertinentes pour les données manquantes, évaluer la durée maximale de vie de ce processeur dans les deux configurations.

Données :

$$\mathcal{P} = 20 \text{ W} \quad \mu_{Al} = 2700 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \quad c_{Al} = 1200 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1} \quad \mu_{Si} = 2300 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \quad c_{Si} = 700 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

1.4.2 Une tasse de thé ?

On dispose d'une bouilloire permettant de chauffer de l'eau grâce à une résistance chauffante et une source de tension stabilisée.

1. En modélisant ce problème physique de manière aussi fidèle que possible et en choisissant des valeurs numériques pertinentes pour les données manquantes, évaluer la durée minimale d'attente pour obtenir l'eau chaude nécessaire à une tasse de thé à bonne température.

Données :

$$R = 30 \Omega \quad E = 230 \text{ V} \quad c_p = 4200 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

1.5 Annales**1.5.1 Cycle infinitésimal d'une pompe à chaleur****[2016 CCS TSI]**

Le réchauffement climatique s'est imposé comme un défi majeur pour notre société. Dans le cadre du développement durable, la pompe à chaleur est une machine thermique particulière intéressante en raison de son efficacité supérieure à un. Elle permet ainsi de diviser la consommation énergétique par ce même coefficient. Le fluide utilisé dans la pompe à chaleur du laboratoire est le fluide HFC référencé R134a.

Le dispositif comprend les différents organes mentionnés figure 1.3. Le fluide R134a est contenu dans un tuyau de cuivre parfaitement fermé. Sous forme gazeuse à la sortie du compresseur (point 2), il subit une liquéfaction au niveau du condenseur : le tuyau de cuivre prend la forme d'un serpentin plongé dans le seau de droite contenant de l'eau (point 3). Le liquide subit ensuite une détente au niveau du détendeur (évolution de 4 à 5) avant de se vaporiser complètement au niveau de l'évaporateur : le tuyau de cuivre

prend la forme d'un serpentin plongé dans le seau de gauche contenant de l'eau (point 6). Il retourne à nouveau dans le compresseur (point 1) poursuivre un nouveau cycle.

On dispose de deux manomètres (basse pression et haute pression) permettant une mesure de pression relative (P_{rb} et P_{rh}); pour obtenir la pression. Ces manomètres présentent une double graduation pression et température.

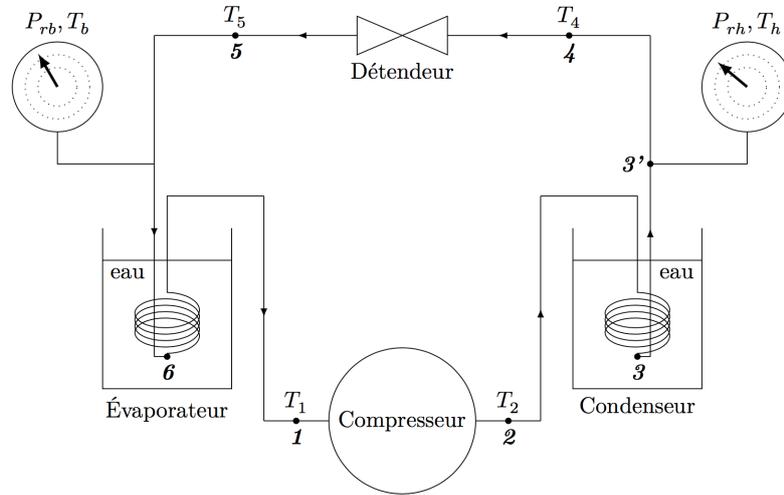


Fig. 1.3 – Schéma d'ensemble de la pompe à chaleur

On utilise un système d'expérimentation assistée par ordinateur afin de suivre l'évolution des températures T_i aux différents points et de la puissance \mathcal{P} consommée par le compresseur.

Dans cette partie, on considère que les températures des sources, constituées des masses d'eau m_e contenues dans les seaux en plastiques, varient au cours de l'expérience. On suppose également que toutes les évolutions sont réversibles. A la date $t = 0$, on met en marche la pompe à chaleur alors que les deux seaux contiennent chacun $m_e = 4 \text{ kg}$ d'eau à la même température T_0 . On note c_e la capacité thermique massique de l'eau.

1. (a) Appliquer le premier principe au fluide R134a pour un cycle infinitésimal.
(b) Appliquer le second principe au fluide R134a pour un cycle infinitésimal.
2. (a) Exprimer le transfert thermique élémentaire δQ_f reçu par le fluide de la part de la source froide en fonction de m_e , c_e , dT_f , où dT_f est la variation élémentaire de température de la source froide.
(b) Exprimer le transfert thermique élémentaire δQ_c reçu par le fluide de la part de la source chaude en fonction de m_e , c_e , dT_c , où dT_c est la variation élémentaire de température de la source chaude.
(c) En déduire la relation : $\frac{dT_f}{T_f} + \frac{dT_c}{T_c} = 0$.
3. Lors de l'expérience, on obtient les tracés de la figure 1.4 avec $\theta_0 = 17^\circ\text{C}$, où θ_0 représente la température initiale commune des deux seaux.
 - (a) Commenter l'allure des trois courbes du haut donnant les variations de $T_c(t)$, $T_f(t)$ et $\sqrt{T_c(t) \cdot T_f(t)}$. On commentera avec soin l'allure de cette dernière courbe.
 - (b) Pour $t > 1500 \text{ s}$, on observe que la température T_f ne varie plus. Quel phénomène se produit-il à partir de cette date? Proposer une expression pour le transfert thermique infinitésimal δQ_f pour $t > 1500 \text{ s}$? Le candidat pourra introduire une ou plusieurs grandeurs qu'il définira soigneusement.

Dans la suite, on se place à $t > 1500 \text{ s}$.

4. On définit une efficacité théorique par $\eta_t = \left| \frac{\delta Q_c}{\delta W} \right|$ où δW est le travail reçu par le fluide de la part du compresseur au cours d'un cycle infinitésimal.
 - (a) Justifier la définition de η_t .

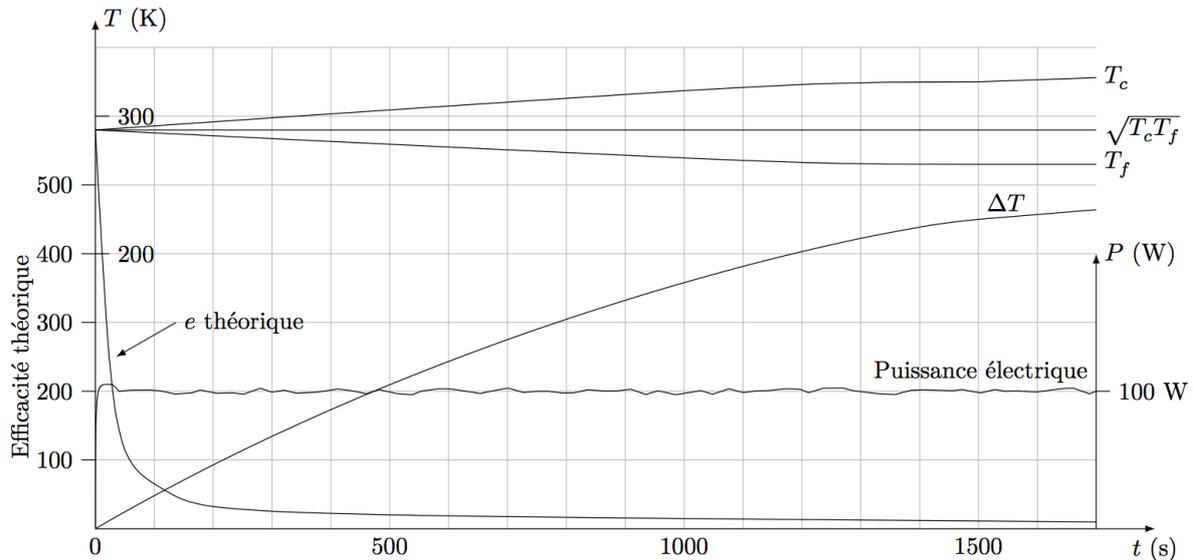


Fig. 1.4 – Courbes expérimentales

(b) Exprimer η_t à l'aide de T_c et T_f .

(c) En déduire : $\eta_t = \frac{T_c^2}{T_c^2 - T_0^2}$.

(d) En exprimant $\Delta T = T_c - T_f$, on peut montrer que l'efficacité théorique η_t de la pompe à chaleur s'écrit : $\eta_t = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{T_0}{\Delta T}\right)^2}$. Commenter cette expression. La courbe e théorique (figure 1.4) est-elle en accord avec cette expression ?

1.5.2 Coordonnées d'Amagat

[2015 CCP MP]

- Donner l'équation d'état des gaz parfaits qui relie la pression p , le volume massique v , la masse molaire M , la température T et la constante des gaz parfaits R .

Afin de mesurer le caractère compressible de l'eau, on définit le coefficient de compressibilité isotherme : $\chi_T = -\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial p} \Big|_T$.

- Montrer que pour un gaz parfait la compressibilité isotherme est donnée par : $\chi_{T,GP} = \frac{1}{p}$.

Le document 1.5 donne l'allure des isothermes de l'eau en coordonnées d'AMAGAT, c'est-à-dire le graphe portant le produit pv en fonction de p , pour différentes températures. On se propose de justifier certaines affirmations données dans le texte accompagnant le graphe, marquées en gras.

- Justifier les affirmations **1** et **3** du document 1.5.

- Montrer que : $\frac{1}{v} \frac{\partial pv}{\partial p} \Big|_T = 1 - \frac{\chi_T}{\chi_{T,GP}}$. Justifier alors l'affirmation **2** du document 1.5.

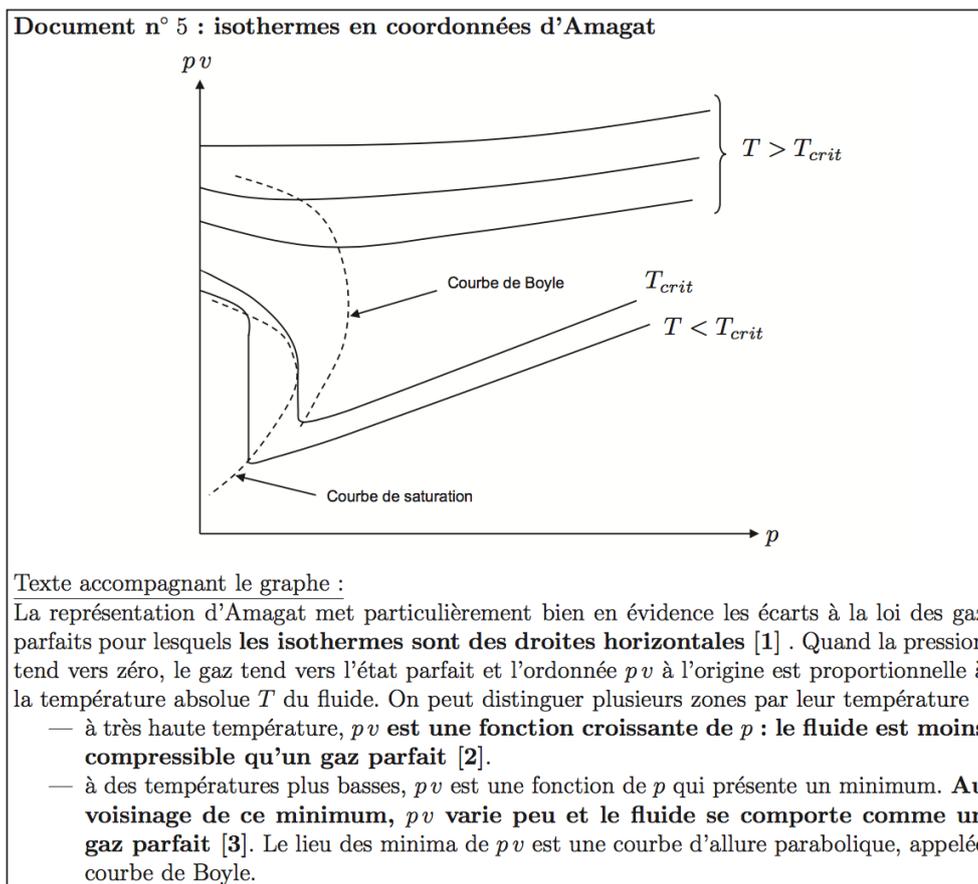


Fig. 1.5 – Isothermes en coordonnées d'Amagat