Table des matières

4 Statique des fluides

4.1 Exercices d'application

4.1.1 Forces de volume

1. Établir les forces volumiques associées aux forces suivantes :
   (a) poids de la particule fluide ;
   (b) force gravitationnelle appliquée à la particule fluide ;
   (c) force d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{F} = m\omega^2\overrightarrow{OM}$,
   (d) force de LORENTZ.

4.1.2 Gradients

1. Établir le gradient des grandeurs scalaires suivantes :
   (a) $\mathcal{E}_p = mgz + \text{cste}$ où z est la verticale ascendante d'une base de projection cartésienne ;
   (b) $\mathcal{E}_p = -\mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r}$ où r est représente la distance OM dans une base de projection sphérique ;
   (c) $\mathcal{E}_p = \frac{k}{2}\left(x - \ell_0\right)^2$ où $x = OM$ dans une base cartésienne.
2. Proposer alors une relation entre l'énergie potentielle et la force qui en dérive.

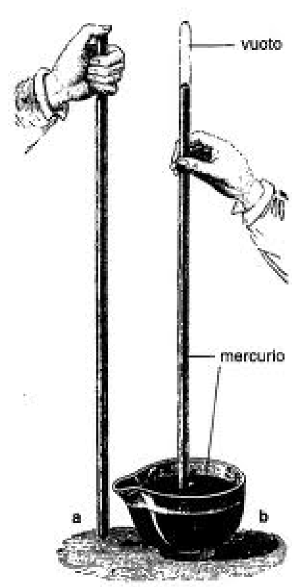
Données :

En coordonnées sphériques : $\overrightarrow{\text{grad}}\, T(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial T}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \varphi}\overrightarrow{u_\varphi}$.

4.1.3 Baromètre de Torricelli

On considère un tube cylindrique vertical de section S et de hauteur $H \simeq 1{,}0\,\text{m}$ totalement rempli de mercure que l'on renverse dans une cuve, elle-même plein de mercure, sans perdre de matière. Le dispositif est maintenu à la température $T_0 = 293\,\text{K}$. On note $\mu = 13{,}4 \times 10^3\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ la masse volumique du mercure supposée indépendante de la pression.

On complète le dispositif de la figure ci-contre d'un axe Oz, orienté selon la verticale ascendante.



1. Quelle hypothèse raisonnable peut-on faire sur la masse volumique du fluide mercure ?
2. Rappeler la relation de la statique des fluides et la projeter sur l'axe Oz.
3. En déduire la loi d'évolution $P(z)$ de la pression dans le mercure.

L'image historique ci-contre montre une zone de vide (*vuoto* en italien) au delà d'une certaine hauteur de mercure.

4. Pour quelle hauteur de mercure atteint-on ce « vide » ?
5. De quoi est réellement composé ce « vide » ?

4.1.4 Atmosphère adiabatique

La température et la pression de l'atmosphère varient en fonction du lieu de mesure et du moment où elle a été effectuée (saison, heure de la journée, ...). L'organisation internationale de normalisation (ISO pour International Organization for Standardization) a donc définie un modèle de l'atmosphère standard dite « ISA » (International Standard Atmosphere) pour permettre la calibration de certains appareils de mesure. Ce modèle se compose de diverses tables de valeurs et fonctions de référence parmi lesquelles une fonction affine de l'altitude selon laquelle, en orientant l'axe Oz selon la verticale ascendante, on a :

$$T(z) = T_0 + \alpha z$$

1. Quel modèle thermodynamique raisonnable peut-on proposer pour l'air ?
2. En déduire la loi d'évolution de la masse volumique de l'air en fonction de la pression et de diverses constantes.
3. Rappeler l'expression de la relation de la statique des fluides et en déduire l'équation différentielle vérifiée par la pression P_{adiab}.
4. En notant $P_{\text{adiab}}(z = 0) = P_0$ résoudre cette équation différentielle.
5. Par analyse dimensionnelle, en déduire l'expression d'une hauteur caractéristique H_{adiab} et la calculer.

On rappelle le résultat obtenu en cours pour l'atmosphère isotherme : $P_{\text{iso}T}(z) = P_0 \exp\left(-\frac{Mg}{RT_0}z\right)$.

6. Par analyse dimensionnelle, en déduire l'expression d'une hauteur caractéristique H_{isoT} et la calculer.
7. En se plaçant à $z \ll H_{\text{adiab}}$, en déduire une expression simplifiée de P_{adiab}.
8. En se plaçant à $z \ll H_{\text{isoT}}$, faire de même pour P_{isoT}.
9. Conclure.

Données :

$R = 8{,}31\,\text{JK}^{-1}\text{mol}^{-1}$; $T_0 = 15\,°\text{C}$; $\alpha = -6{,}5 \times 10^{-3}\,°\text{Cm}^{-1}$; $M = 29\,\text{gmol}^{-1}$

4.1.5 Force exercée sur un bol

Un bol de forme hémisphérique de rayon R est complètement rempli d'un liquide de masse volumique μ et posé sur une table.

1. Par analyse des symétries du problème, donner l'expression du vecteur unitaire $\vec{u}$, donnant le sens de la résultante des forces de pression.
2. Établir l'évolution de la pression en fonction de la profondeur z, puis celle de la pression en un point M de la paroi du bol en fonction de θ.
3. Établir l'expression du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{d}S}(M)$ et en déduire l'expression de la force élémentaire δF_u, projection de $\overrightarrow{\delta F}$ sur le vecteur unitaire $\vec{u}$.
4. En déduire l'expression de la force de pression exercée sur le bol.

4.1.6 Poussée d'Archimède

On considère un corps $\mathcal{C}$ de volume V et de masse volumique μ assimilable à un objet ponctuel que l'on lance avec une vitesse initiale $\vec{v}(t = 0) = \overrightarrow{V_0}$ vers un bassin rempli d'eau situé à une distance L. L'espace est décrit à l'aide d'une base cartésienne telle que représentée en figure 4.1 et on négligera l'ensemble des frottements de $\mathcal{C}$ dans l'air et dans l'eau.

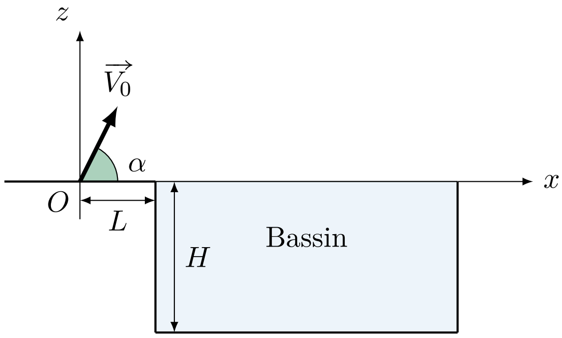


Fig. 4.1 – Bassin d'atterrissage

1. Établir une condition nécessaire sur la vitesse $\overrightarrow{V_0}$ pour que le corps $\mathcal{C}$ atteigne le bassin.
2. On suppose cette condition remplie, quelle est la vitesse $\overrightarrow{V_1}$ avec laquelle le corps $\mathcal{C}$ entre dans l'eau ?
3. En déduire une condition sur cette vitesse $\overrightarrow{V_1}$ pour que le corps $\mathcal{C}$ ne touche pas le fond du bassin.

4.2 Problèmes

4.2.1 Équilibre de 3 liquides non miscibles

Soit 3 liquides non miscibles (eau, mercure, alcool) en équilibre statique dans un tube en U ouvert à l'air libre comme représenté en figure 4.2. On note μ_e, μ_m et μ_a les masses volumiques de l'eau, du mercure et de l'alcool respectivement.

1. Quelle hypothèse raisonnable peut-on faire pour les trois fluides proposés ?
2. Montrer que dans un liquide incompressible, la pression est une fonction affine de la profondeur z.
3. Comment se traduit la condition d'équilibre pour chacune des interfaces air-eau, eau-mercure, mercure-alcool et alcool-air ?
4. En déduire l'expression de la pression à chacune des interfaces précédentes.
5. En déduire une expression de μ_a en fonction de μ_e, μ_m, h_1, h_2 et h_3. Faire l'application numérique.

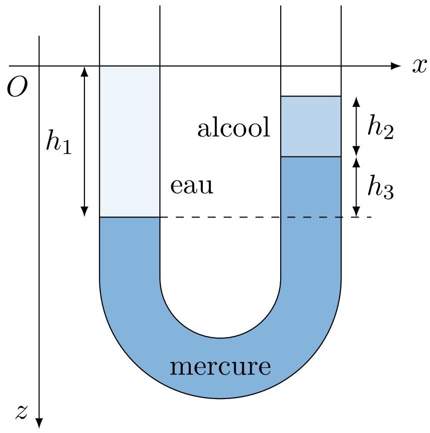


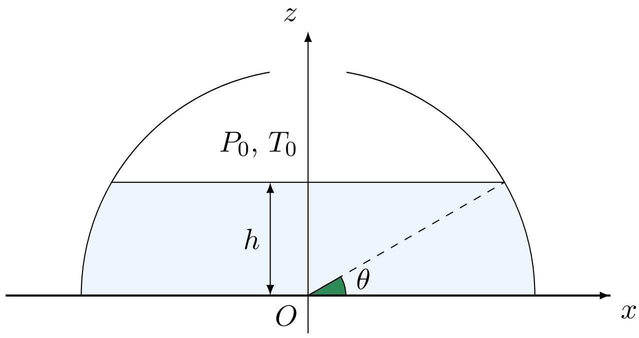
Fig. 4.2 – Tube en U

Données :

$\mu_e = 1{,}0 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$; $\mu_m = 13{,}4 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$; $h_1 = 0{,}80\,\mathrm{m}$; $h_2 = 0{,}20\,\mathrm{m}$; $h_3 = 0{,}05\,\mathrm{m}$.

4.2.2 Bol renversé

On considère une demi-sphère de rayon R et de masse m, posée sur le sol et percée d'un orifice en son sommet. On remplit progressivement la demi-sphère d'eau de masse volumique μ_0 constante. L'air environnant est supposé à température et pression constantes T_0, P_0 et on suppose que l'équilibre thermique et mécanique est réalisé à chaque instant. On oriente l'espace à l'aide d'un repère cartésien où l'axe Oz est vertical ascendant et on note z l'altitude du cylindre dans ce repère.



1. Exprimer la pression $P(z)$ qui règne dans l'eau en fonction de z et h la hauteur totale d'eau versée dans le bol à un instant t donné.
2. Par une analyse des symétries du problème, donner la direction de la force exercée par l'eau sur le bol.
3. Pour une hauteur donné d'eau versé h, calculer la force de pression exercée par l'eau sur le bol.
4. En déduire la hauteur d'eau h_{max} que l'on pourra verser avant que la demi-sphère ne se soulève.

4.2.3 Cloche renversée

On renverse une cloche cylindrique de section s, de hauteur totale h et de masse m, que l'on laisse descendre verticalement dans une cuve à eau. La cloche s'enfonce dans l'eau en emprisonnant l'air qui occupait initialement son volume intérieur.

A l'équilibre, représenté en figure 4.3, la cloche est enfoncée d'une certaine profondeur x. On donne la pression atmosphérique de l'air $P_0 = 1{,}0 \times 10^5$ Pa et la masse volumique de l'eau $\mu_0 = 1{,}0 \times 10^3\,\text{kgm}^{-3}$. L'épaisseur des parois de la cloche est supposée négligeable.

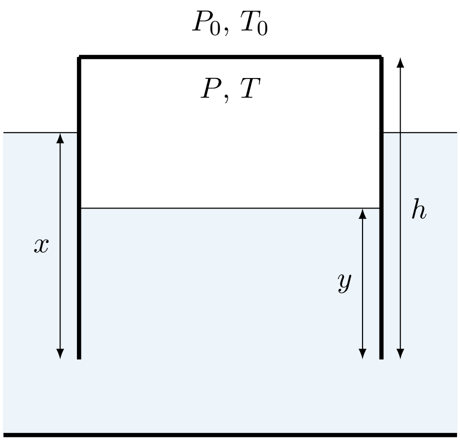


Fig. 4.3 – Cloche renversée

1. Faire un bilan des forces exercées sur la cloche à l'équilibre.
2. Exprimer la condition d'équilibre mécanique de la cloche, en déduire un lien entre P, la pression qui règne dans la cloche à l'équilibre, et P_0.
3. Exprimer la condition d'équilibre thermique de la cloche, en déduire un lien entre P_0, s, m, g, h et y.
4. En exploitant la relation de la statique des fluides, établir un lien entre la hauteur x et les grandeurs h, P_0, m, g, μ et s.
5. A quelle condition sur le volume $V_0 = hs$ de la cloche celle-ci peut-elle flotter ?

4.2.4 Pression et température au centre du Soleil

On assimile le Soleil à un astre sphérique de centre S et de rayon $R_S = 1 \times 10^8$ m, incompressible et homogène de masse $M_S = 2 \times 10^{30}$ kg.

1. Rappeler l'expression de la force de gravitation exercée par le Soleil sur un corps de masse m. En déduire la force volumique de gravitation $\overrightarrow{f}_{\text{vol}}$.

On admettra qu'au sein du Soleil, cette force volumique s'écrit $\overrightarrow{f}_{\text{vol}} = -\mathcal{G}\frac{\mu M_S}{R_S^3} r\overrightarrow{u_r}$ où μ est la masse volumique du corps sur lequel s'exerce cette force volumique.

2. En négligeant la pression à la surface du Soleil, en déduire la pression en son centre.
3. En supposant que le Soleil est assimilable à un plasma d'hydrogène, lui-même assimilable à un gaz parfait, en déduire la température au centre du Soleil.
4. Pour amorcer une réaction de fusion nucléaire de deux noyaux d'hydrogène, une température minimale de $T_{\text{min}} = 4 \times 10^6$ K est nécessaire. Commenter les résultats obtenus.

Données :

- Coordonnées sphériques : $\overrightarrow{\text{grad}}\, p = \frac{\partial p}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \varphi}\overrightarrow{u_\varphi}$.
- Masse molaire de l'hydrogène $M_H = 1\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$.
- Constante gravitationnelle $\mathcal{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\text{m}^3/\text{kg}/\text{s}^2$

4.2.5 Vol en ballon

L'air est assimilé à un fluide compressible, obéissant à l'équation des gaz parfaits, dont la température est uniforme et constante, indépendante de la hauteur z.

1. Donner la relation existant entre la masse molaire M_{air}, la masse volumique μ, la pression P, la température T et la constante des gaz parfaits.
2. Montrer que la pression d'une atmosphère isotherme est de la forme : $P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$ où H est une longueur exprimée en fonction de M_{air}, R, T et g, que l'on calculera pour $T = 290$ K.

Soit un aérostat composé d'une nacelle de masse m et d'un ballon de volume V constant dont la masse de l'enveloppe est négligeable. La pression régnant à l'intérieur du ballon reste égale, à tout instant, à la pression extérieure. On note T_f la température extérieure et T celle qui règne à l'intérieur du ballon. La masse volumique de l'air au niveau du sol est notée μ_0, et on note m_0 la masse d'air présente dans le ballon lorsque celui-ci est posé au sol et que la température interne est égale à T_f.

3. On note T_c, respectivement μ_c, la température, respectivement la masse volumique, de l'air régnant à l'intérieur du ballon. Déterminer la relation existante entre μ_c, T_c, T_f et la masse volumique $\mu(z)$ de l'air à l'extérieur du ballon, situé à une altitude z quelconque.
4. Le ballon se trouve à l'altitude nulle $z = 0$, pour laquelle la pression extérieure est P_0. Déterminer la température minimale T_{min} de l'air intérieur, permettant à l'aérostat de s'élever spontanément. On exprimera le résultat en fonction de T_f, m_0 et m.
5. L'air du ballon est chauffé jusqu'à une température $T_c > T_{\text{min}}$. Déterminer dans ces conditions la hauteur maximale z_{max} atteinte par le ballon.
6. Calculer sur la base du résultat précédent, le volume minimal V d'un ballon permettant d'élever deux passagers, une enveloppe et une nacelle, de masse $m = 500$ kg, à une hauteur de $Z = 1000$ m

au dessus du sol, sachant que la température maximale de l'air chaud à l'intérieur du ballon est de 60 K plus élevée que la température extérieure $T_f = 280\,\mathrm{K}$ et que la pression extérieure est de $P_0 = 1{,}0\,\mathrm{bar}$.

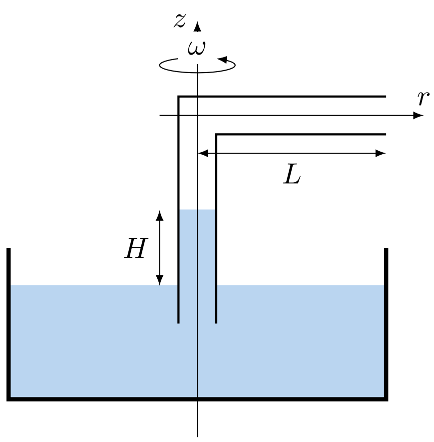
7. Déterminer la quantité de chaleur Q_1 nécessaire pour élever, de façon quasistatique et à pression constante P_0, la température de la quantité de fluide initialement présente dans le ballon de sa valeur initiale T_f à sa valeur finale T_c. Exprimer le résultat en fonction de m_0, M_{air}, $C_{\text{p,m}}$, T_c et T_f.

Données :

– Masse molaire de l'air : $M_{\text{air}} = 29\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$;
– Coefficient thermique molaire à pression constante $C_{\text{p,m}} = \frac{7R}{2}$.

4.2.6 Tube tournant

Un tube coudé plonge dans de l'eau (masse volumique $\mu = 1 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$). Ce tube tourne autour de l'axe vertical Oz à la vitesse angulaire ω. La pression atmosphérique est notée P_a. On note μ_a la masse volumique de l'air supposée constante. La section du tube est supposée être très faible.



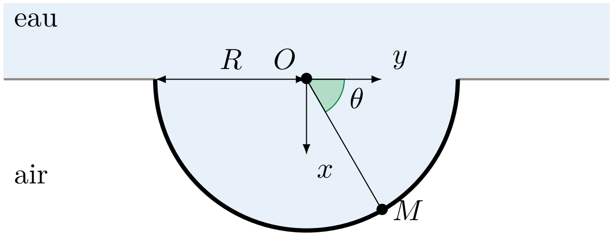
1. Établir la relation de la statique des fluides pour une résultante des forces de volume $\vec{F}$ quelconque.
2. On raisonne dans le référentiel lié au tube, qui n'est pas galiléen. On admettra que l'on peut y écrire le principe fondamental de la dynamique à condition d'ajouter au bilan des forces, la force d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{F_{\text{i,e}}} = m\omega^2 r\overrightarrow{u_r}$. L'air est en équilibre dans ce référentiel. On considère une petite tranche d'air mésoscopique de masse δm, comprise entre r et $r + \mathrm{d}r$.
   (a) Quelles sont les forces volumiques qui s'exercent sur cette tranche ?
   (b) On fait l'hypothèse que l'effet du poids est négligeable sur ce système. En déduire une équation différentielle vérifiée par la pression dans la partie horizontale du tube.
   (c) Exprimer la pression $P(r)$ de l'air dans le tube à une distance r de l'axe Oz en fonction de P_a, ω, L et r.
3. Déterminer la dénivellation du liquide.

Données :

– Coordonnées sphériques : $\overrightarrow{\text{grad}}\, p = \frac{\partial p}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{\partial p}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$.

4.2.7 Barrage hémisphérique

Un barrage de hauteur H et de rayon R retient une masse d'eau comme représenté sur le schéma ci-dessous en vue de dessus.



1. Quel modèle peut-on appliquer à la phase liquide eau ? En déduire une expression de sa masse volumique.
2. Établir l'expression de l'évolution de la pression $P_{\text{eau}}(z)$ en fonction de $P_0 = P_{\text{eau}}(z = 0)$, de g l'intensité de pesanteur, de μ_0 la masse volumique de l'eau et de la profondeur z.
3. Comment évolue la pression P_{air} qui règne dans l'air sur une hauteur $H \propto 100\,\text{m}$?.

On s'intéresse à une petite tranche de barrage mésoscopique d'épaisseur dz.

4. Quelles sont les forces élémentaires qui s'exercent sur cette tranche ? Quelles symétries présentent-elles ? Que peut-on en déduire ?
5. En déduire que la résultante des forces de pression exercées sur le barrage selon l'axe Ox s'écrit :

$$\delta F_x = \pm \iint_\Sigma \mu_0 g z \sin\theta \mathrm{d}z R \mathrm{d}\theta$$

6. Exprimer alors la force totale exercée par les fluides eau et air sur le barrage.

4.3 Problèmes ouverts

4.3.1 Vol de lanterne

En Thaïlande, il est de coutume de faire voler de nuit des lanternes constituées d'une enveloppe épaisse de papier et d'une masse combustible solidaire de la lanterne.

1. En modélisant ce problème physique de manière aussi fidèle que possible et en choisissant des valeurs numériques pertinentes pour les données manquantes, évaluer la température de l'air à l'intérieur de la lanterne lors son décollage.

Données :

$m_{\text{solides}} = 50\,\text{g}$; $M_{\text{air}} = 29\,\text{gmol}^{-1}$; $R = 8{,}31\,\text{Jmol}^{-1}\text{K}^{-1}$.

4.4 Oral Banque PT

4.4.1 Barrage en trois morceaux

On considère le schéma 4.4 dans lequel un barrage plan, de hauteur totale $h = 9\,\text{m}$ et de largeur L, retient de l'eau de masse volumique μ. La paroi du barrage est constituée de 3 murs de hauteurs respectives h_1, h_2, h_3.

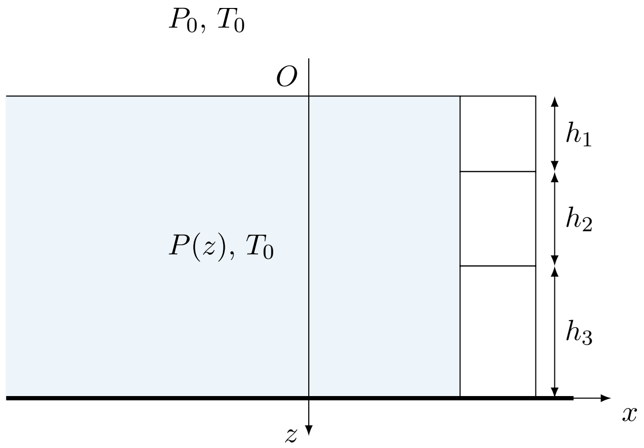


Fig. 4.4 – Barrage

1. Rappeler l'expression de la loi de la statique des fluides.
2. Établir l'expression de la pression dans l'eau en fonction de la position z, de la pression atmosphérique P_0 et des paramètres nécessaires.
3. Établir l'expression de la force $\overrightarrow{F_i}$ exercée par l'eau et l'air extérieur sur chacun des murs de hauteur h_i.
4. En déduire l'expression des diverses hauteurs h_i permettant que chaque mur subisse la même force de pression.

4.4.2 Atmosphère isotherme

On suppose que l'air est un gaz parfait composé à 78 % de diazote, à 21 % de dioxygène, et à 0,93 % d'argon. On suppose également que la pesanteur est uniforme ainsi que la température. On note $p_0 = p(z = 0)$ la pression au sol.

1. Montrer que $R = 8{,}31\,\mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$ dans les conditions normales de pression et de température (C.N.P.T).
2. Montrer que la masse molaire de l'air vaut $M_{\text{air}} = 29\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$.
3. Énoncer la loi de la statique des fluides, et établir l'équation différentielle vérifiée par la pression dans l'atmosphère.
4. Calculer $\frac{P(z=1\times 10^3\,\mathrm{m})}{P_0}$. Commenter la valeur obtenue.

Données :

- Masses molaires : $M(\mathrm{Ar}) = 18\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$; $M(\mathrm{N_2}) = 28\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$; $M(\mathrm{O_2}) = 32\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$.
- Volume molaire de l'air dans les CNPT : $22{,}4\,\mathrm{L \cdot mol^{-1}}$.

4.5 Annales

4.5.1 Formation et stabilité d'un nuage [2015 CCP PSI]

On s'intéresse à l'équilibre de l'air dans l'atmosphère terrestre. Les valeurs de référence pour la température et la pression seront celles relevées à la surface de la Terre, à savoir $P_0 = 1{,}0 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$ et $T_0 = 300\,\mathrm{K}$. L'air sera assimilé à un gaz parfait. On repère ici l'espace par le trièdre (O, x, y, z). L'axe des z vertical est dirigé vers le haut et son origine O coïncide avec la surface de la Terre.

Équilibre isotherme de l'atmosphère

On suppose ici que la température de l'atmosphère est uniforme et vaut T_0 pour tout z. On note $\rho_{\text{air}}(z)$ la masse volumique de l'air à l'altitude z.

1. On note M_{air} la masse molaire de l'air. Quels sont les deux principaux constituants physico-chimiques de l'air ? En quelles proportions molaires y sont-ils présents ? En ne considérant que ces deux principaux constituants de l'air, déterminer la valeur numérique de M_{air}.
2. En décrivant une condition d'équilibre mécanique sur un élément infinitésimal situé entre les altitudes z et $z + \mathrm{d}z$, montrer que : $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho_{\text{air}} g$.
3. Déterminer l'expression de la pression $P(z)$ de l'air en fonction de l'altitude z.
4. En déduire un ordre de grandeur de l'épaisseur caractéristique de l'atmosphère.

Équilibre de l'atmosphère caractérisé par un gradient de température

La température dans les basses couches de l'atmosphère n'est pas uniforme mais décroît avec l'altitude. Dans cette partie, on admettra que cette température suit une décroissance affine de la forme : $T(z) = T_0 - \lambda z$ avec $\lambda = 0{,}007\,\mathrm{K \cdot m^{-1}}$.

5. (a) À partir de la condition d'équilibre mécanique d'un élément infinitésimal d'atmosphère, déterminer l'expression littérale de $P(z)$.
   (b) Les applications numériques donnent :

Altitude (km)	0,5	2	5	8	11	14
Pression (Pa)	94500	79300	54800	36700	23700	14600

   Jusqu'à quelle altitude et avec quelle précision, le modèle de l'atmosphère isotherme est-il pertinent ?

Profil de température au sein d'une colonne d'air humide à toutes les altitudes, formation du nuage

D'un point de vue thermodynamique, l'ascension verticale d'une colonne d'air humide, depuis la surface de la Terre à la pression P_0, jusqu'à l'altitude z à la pression $P(z)$, sera assimilée à une détente adiabatique et mécaniquement réversible. Par ailleurs, l'air humide contenant une faible quantité de vapeur d'eau sera encore assimilable à un gaz parfait de masse molaire M_{air}.

6. Écrire le système d'équations permettant de déterminer le profil de température $T(z)$ au sein d'une colonne d'air humide, en équilibre mécanique, pour toutes les altitudes.

La résolution des équations précédentes aboutit à l'expression :

$$T(z) = T_0 \left(1 - \frac{z}{z_2}\right) \text{ avec } z_2 = \frac{\gamma R T_0}{(\gamma - 1) M_{\text{air}} g}$$

7. (a) Par extrapolation, évaluer la pression de vapeur saturante de l'eau à l'altitude $z = 500\,\mathrm{m}$.
   (b) En supposant que la fraction molaire de l'eau dans la colonne humide est de 4%, montrer que l'eau devrait se liquéfier en dessous de 500 m.
   (c) En général, les observations rendent compte d'une liquéfaction survenant à des altitudes légèrement supérieures. Expliquer. Ce phénomène de métastabilité existe aussi pour des corps purs lors du changement d'état liquide – solide. Dans ce dernier cas, quel nom lui est associé ?

Stabilité du nuage : pourquoi les gouttelettes d'eau de la partie inférieur du nuage ne tombent-elles pas ?

On supposera dans cette étude sur la stabilité du nuage que l'air est immobile dans le référentiel terrestre supposé galiléen et a une masse volumique constante $\rho_{\text{air}} = 1{,}2\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$. On repère ici l'espace par le trièdre (O', x, y, z'). L'axe des z' vertical est dirigé vers le bas et son origine O' coïncide avec la base d'un cumulo-nimbus. On considère la chute d'une fine gouttelette d'eau liquide de rayon $r = 0{,}01\,\text{mm}$, située initialement à 2000 m au-dessus de la surface de la Terre et dépourvue de vitesse initiale. On suppose que les frottements exercés par l'air sur la gouttelette sont modélisables par la force $\vec{f} = 6\pi\eta_{\text{air}} r \vec{v}$, où η_{air} correspond à la viscosité de l'air et $\vec{v}$ à la vitesse de la gouttelette.

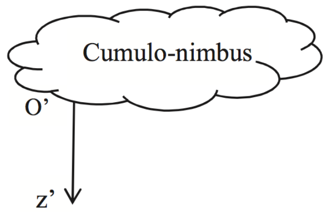


Fig. 4.5 – Orientation de l'espace

8. (a) Faire un bilan des forces exercées sur la gouttelette d'eau.
   (b) Pourquoi est-il légitime de ne pas prendre en compte la poussée d'Archimède ?
   (c) En déduire l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $\vec{v}$ de la gouttelette d'eau.
9. Montrer que la gouttelette d'eau tend à atteindre une vitesse limite, notée $\vec{v}_{\text{lim}}$, dont on précisera l'expression ainsi que sa valeur numérique.
10. Évaluer un ordre de grandeur de la durée nécessaire pour que la gouttelette d'eau atteigne sa vitesse limite.
11. A l'aide d'une approximation que l'on justifiera, déterminer la durée de chute d'une gouttelette d'eau depuis la base d'un cumulo-nimbus, initialement située à 2000 m au-dessus de la surface de la Terre, jusqu'au sol.

Données :

- Accélération de la pesanteur $g = 9{,}81\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$;
- Constante des gaz parfaits $R = 8{,}314\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$;
- Masse molaire de l'oxygène : $M_O = 16\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$;
- Masse molaire de l'azote : $M_N = 14\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$;
- Masse volumique de l'eau liquide : $\rho_{\text{eau}} = 1000\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$;
- Viscosité de l'air $\eta_{\text{air}} = 1{,}8\times10^{-5}\,\text{Pa}\cdot\text{s}$;
- Pour les gaz diatomiques, on donne $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1,4$.

Température (°C)	Pression de vapeur saturante (Pa)
-10	260
0	610
5	872
10	1230
15	1700
20	2340
25	3170
30	4240

4.5.2 Un vol en ballon [2014 CCP PC]

L'espace est repéré à l'aide de coordonnées cartésiennes (x, y, z) et d'un repère $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ associé.

Statique des fluides incompressibles

On considère un fluide incompressible, de masse volumique μ, au repos dans un champ de pesanteur uniforme $\overrightarrow{g}$. Les hauteurs sont rapportées à un axe vertical (Oz) dirigé vers le haut.

1. En considérant, par exemple, un volume $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ de fluide, établir la relation différentielle liant la pression P, μ, g (norme de $\overrightarrow{g}$) et z (équation de l'hydrostatique).
2. Donner l'expression de la fonction $P(z)$, pression fonction de la hauteur, solution de l'équation précédente, en prenant comme constante d'intégration $P(0) = P_0$.
3. Énoncer le théorème d'Archimède pour un corps solide quelconque totalement immergé dans le fluide représenté sur la figure 4.6.

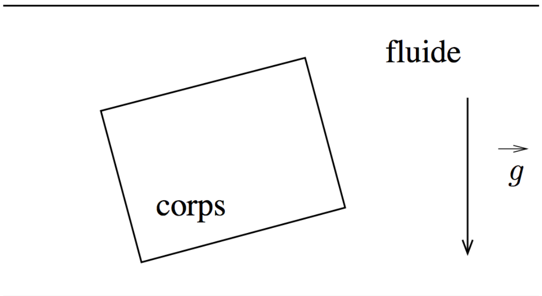


Fig. 4.6 – Parallélépipède rectangle plongé dans un fluide

4. Recopier sommairement la figure et y représenter graphiquement la résultante des forces de pression exercées sur l'objet, représenté vu de profil sur la figure. Les forces de pression exercent-elles un couple de torsion sur l'objet ?

Modèle d'atmosphère isotherme

L'air est assimilé à un fluide compressible, obéissant à l'équation des gaz parfaits, dont la température est uniforme et constante, indépendante de la hauteur z.

5. Donner la relation existant entre la masse molaire M_{air}, la masse volumique μ, la pression P, la température T et la constante des gaz parfaits.
6. Montrer que, dans ce cas, la solution de l'équation obtenue à la question 1 est de la forme :

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$$

où H est une longueur que l'on exprimera en fonction de M_{air}, R, T et g, puis que l'on calculera numériquement pour $T = 280\,\mathrm{K}$.
7. Quelle valeur de la pression ce modèle prédit-il au sommet du Puy de Dôme, d'altitude $z_p = 1465\,\mathrm{m}$, lorsque $T = 280\,\mathrm{K}$ et $P_0 = 1013\,\mathrm{hPa}$?

A l'époque de Blaise Pascal, l'instrument de mesure de la pression atmosphérique le plus commode était le tube de Torricelli. L'expérience consiste à remplir complètement un tube de mercure, le boucher avec le doigt pour empêcher l'air de rentrer et le renverser sur un bassin, lui aussi rempli de mercure.

On constate que le tube ne se vide pas complètement dans le bassin mais qu'une colonne de mercure de 76 cm reste dans le tube.

8. Expliquer le principe de fonctionnement du baromètre de Toricelli.
9. Déterminer la hauteur de la colonne dans le tube si le dispositif est installé au sommet du Puy de Dôme.
10. Déduire, du profil de pression $P(z)$, l'expression de la masse volumique $\mu(z)$ en fonction de la hauteur. En supposant que l'on puisse négliger la courbure de la Terre, calculer la masse totale de gaz occupant une colonne semi-infinie, de section horizontale $a = 1\,\mathrm{m}^2$, s'étendant de la hauteur $z = 0$ jusqu'à l'infini. Montrer que cette masse s'exprime simplement en fonction de P_0, de a et de g supposé constant et uniforme. Ce résultat est-il surprenant ?
11. Déduire de la question précédente une estimation de la masse totale de l'atmosphère de la Terre.

Ballon à air chaud dans une atmosphère isotherme

Soit un aérostat de volume V supposé constant et dont l'enveloppe et la nacelle sont de masse totale m (la masse de l'air chaud n'étant pas comptée et le volume de la nacelle étant supposé négligeable). La pression régnant à l'intérieur du ballon reste égale, à tout instant, à la pression extérieure. La température de l'air à l'intérieur du ballon, supposée uniforme, est plus élevée que la température extérieure de l'atmosphère isotherme. On notera, dans cette partie, la température de l'atmosphère $T = T_f$. La masse volumique de l'air au niveau du sol, à pression P_0 est notée $\mu_0 = \mu(z = 0)$ et on introduit la masse $m_0 = \mu_0 V$, égale à la masse d'air présente dans le ballon lorsque celui-ci est posé au sol et que la température interne est égale à T_f.

12. La température régnant à l'intérieur du ballon est T_c, et la masse volumique de l'air situé à l'intérieur est μ_c. Déterminer la relation existante entre μ_c, T_c, T_f et la masse volumique $\mu(z)$ de l'air à l'extérieur du ballon, situé à une altitude z quelconque.
13. Le ballon se trouve à l'altitude nulle $z = 0$, pour laquelle la pression alentour est P_0. Déterminer la température minimale $T_{\min}(m)$ devant régner dans le ballon, de masse m (air chaud non compris) pour que celui-ci s'élève spontanément. On pourra exprimer le résultat en fonction de T_f, m_0 et m.
14. L'air du ballon est chauffé jusqu'à une température $T_c > T_{\min}(m)$. Déterminer dans ces conditions la hauteur maximale $Z_{\max}(m, T_c)$ atteinte par le ballon.
15. Calculer sur la base du résultat précédent, le volume minimal V d'un ballon permettant d'élever deux passagers, une enveloppe et une nacelle, de masse $m = 500\,\mathrm{kg}$, à une hauteur de $Z = 1000\,\mathrm{m}$ au dessus du sol, sachant que la température maximale de l'air chaud à l'intérieur du ballon est de 60 K plus élevée que la température extérieure $T_f = 280\,\mathrm{K}$ et que la pression extérieure est de $P_0 = 1{,}0\,\mathrm{bar}$.
16. On cherche à déterminer la quantité d'énergie thermique $Q_{\min}(T_c)$ nécessaire pour élever la température de l'air régnant dans le ballon de sa valeur initiale T_f à sa valeur finale T_c. Déterminer la quantité de chaleur Q_1 nécessaire pour élever, de façon quasistatique et à pression constante P_0, la température de la quantité de fluide initialement présente dans le ballon. Exprimer le résultat en fonction de m_0, M_{air}, $C_{\mathrm{p,m}}$, T_c et T_f.

La grandeur Q_1 déterminée précédemment surestime la quantité $Q_{\min}(T_c)$ désirée. Lorsque de l'énergie thermique est communiquée au gaz situé à l'intérieur du ballon, la pression augmente progressivement et un excès d'air doit alors être extrait du ballon, au moyen par exemple d'une trappe servant de soupape. Le chauffage de l'air situé dans le ballon a lieu au voisinage du sol ($z = 0$), à altitude constante. Une modélisation plus fine de la transformation thermodynamique requise consiste à considérer une suite de N

transformations isobares élémentaires associées à des intervalles de température δT_j, avec $j = 1, \cdots, N$, au cours desquelles seule est considérée la masse d'air restant dans le ballon, l'excès étant éliminé au fur et à mesure.

17. Exprimer d'après la relation établie à la question 12, la masse volumique μ_j restant à l'étape j en fonction de μ_0, T_j et T_f. En déduire la chaleur δQ_j communiquée au fluide lorsque le fluide est chauffé de T_j à T_{j+1}.
18. En intégrant les accroissements infinitésimaux δQ_j jusqu'à l'état final de température T_c, déterminer la quantité d'énergie thermique Q_2 permettant, dans le cadre des approximations précédentes, d'élever la température intérieure du ballon jusqu'à T_c. La quantité Q_2 est assimilée à la grandeur $Q_{\min}(T_c)$.

Données :

- Accélération de la pesanteur $g = 9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$;
- Constante des gaz parfaits $R = 8{,}314\,\mathrm{JK^{-1}mol^{-1}}$;
- Masse molaire de l'air : $M_{\text{air}} = 29\,\mathrm{gmol^{-1}}$;
- Masse volumique du mercure dans les conditions standards $\mu_{\text{Hg}} = 1{,}35 \times 10^4\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$;
- Rayon moyen de la Terre $R_T = 6380\,\mathrm{km}$;
- Coefficient thermique molaire à pression constante $C_{\text{p,m}} = \frac{7R}{2}$.