

# Table des matières

<b>6</b>	<b>Dynamique des fluides</b>	<b>2</b>
<b>6.1</b>	<b>Exercices d'application</b>	<b>2</b>
6.1.1	Épaisseur de couche limite.....	2
6.1.2	Débit massique.....	2
6.1.3	Compressibilité d'un écoulement.....	2
6.1.4	Caractère rotationnel d'un écoulement.....	3
6.1.5	Frottement visqueux dans un écoulement de POISEUILLE plan.....	4
6.1.6	Laminaire ou turbulent?.....	4
6.1.7	BERNOULLI et une conduite horizontale de section constante.....	4
6.1.8	Phénomène de VENTURI.....	4
6.1.9	Pompe à eau.....	5
<b>6.2</b>	<b>Problèmes</b>	<b>6</b>
6.2.1	Utilisation d'un siphon.....	6
6.2.2	Perte de charge.....	6
6.2.3	Jet d'eau dans l'air.....	8
6.2.4	Sténose artérielle.....	8
6.2.5	Vidange de TORRICELLI.....	9
6.2.6	Tube de PITOT.....	10
<b>6.3</b>	<b>Oral Banque PT</b>	<b>10</b>
6.3.1	Écoulement sur un obstacle.....	10
6.3.2	Lubrification simplifiée.....	11
<b>6.4</b>	<b>Annales</b>	<b>12</b>
6.4.1	Étude de l'alimentation en eau d'une maison.....	12
6.4.2	Vidange de citerne.....	12

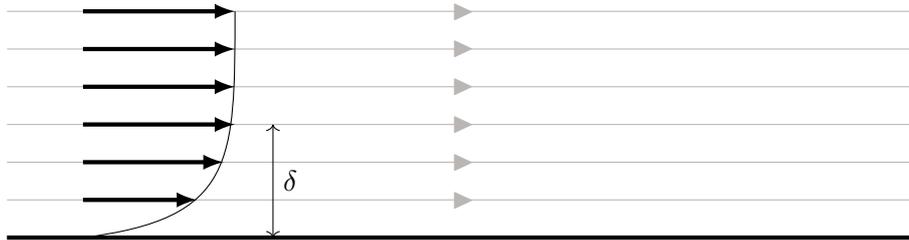
---

# 6 Dynamique des fluides

## 6.1 Exercices d'application

### 6.1.1 Épaisseur de couche limite

On s'intéresse à une paroi sur laquelle un fluide visqueux s'écoule. On constate expérimentalement que l'écoulement se rattache à la vitesse nulle en paroi à travers une zone plus ou moins épaisse de fluide appelée « couche limite ». On s'intéresse à l'épaisseur de cette couche.

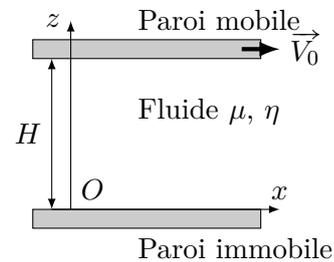


1. De quels paramètres physiques intensifs peut dépendre l'épaisseur de la couche limite  $\delta$  ?
2. En déduire, par analyse dimensionnelle une expression de l'épaisseur de couche limite.

### 6.1.2 Débit massique

On s'intéresse à l'expérience de COUETTE dans laquelle un fluide de masse volumique  $\mu$  est placé entre deux plaques horizontales de largeur  $L$ , l'une étant fixe et l'autre se déplaçant à la vitesse constante  $\vec{V}_0$ .

On observe l'évolution du profil de vitesse selon la verticale et on mesure une vitesse qui vérifie la relation suivante :



$$\vec{v}(z) = \begin{cases} V_0 \frac{z}{H} \vec{u}_x, & \forall z \in [0, H] \\ \vec{0}, & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer le débit massique à travers une section perpendiculaire à l'écoulement pour  $\mu = \mu_0 = \text{cste}$ ,
2. Calculer le débit massique à travers une section parallèle à l'écoulement,
3. Calculer le débit massique à travers une section perpendiculaire à l'écoulement pour  $\mu = \mu_0 \frac{z}{H}$ .

### 6.1.3 Compressibilité d'un écoulement

On donne le profil de vitesse en coordonnées cylindriques d'un écoulement de POISEUILLE dans un cylindre d'axe  $Oz$ , de rayon  $R$  et de longueur  $L$  :

$$\vec{v}(r) = \frac{R^2}{4\eta} \frac{\Delta p}{L} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \vec{u}_z$$

1. Faire un schéma de la géométrie dans laquelle s'écoule le fluide,
2. Tracer les lignes de courant de cet écoulement,
3. Tracer le profil de vitesse de cet écoulement en  $z = 0$ ,  $z = \frac{L}{2}$  et  $z = L$ ,
4. Établir si cet écoulement est compressible ou incompressible.

On donne le profil de vitesse en coordonnées cartésiennes d'un écoulement de COUETTE entre deux plaques séparées de  $H$  (voir exercice 6.1.2 pour son expression et le schéma associé).

5. Faire un schéma de la géométrie dans laquelle s'écoule le fluide,
6. Tracer les lignes de courant de cet écoulement,
7. Tracer le profil de vitesse de cet écoulement en  $x = 0$ ,  $x = \frac{L}{2}$  et  $x = L$ ,
8. Établir si cet écoulement est compressible ou incompressible.

$$\vec{v}(r, z) = \frac{R^2 \Delta p}{4\eta L} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \left(1 - \frac{z}{L}\right) \vec{u}_z$$

9. Faire un schéma de la géométrie dans laquelle s'écoule le fluide,
10. Tracer les lignes de courant de cet écoulement,
11. Tracer le profil de vitesse de cet écoulement en  $z = 0$ ,  $z = \frac{L}{2}$  et  $z = L$ ,
12. Établir si cet écoulement est compressible ou incompressible.

#### Données :

En coordonnées cylindriques :  $\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial r A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

#### 6.1.4 Caractère rotationnel d'un écoulement

1. Reprendre l'exercice 6.1.3, et déterminer pour chacun des écoulements proposés si l'écoulement est rotationnel ou irrotationnel,
2. En déduire le sens de rotation d'une particule fluide.

On donne le profil de vitesse en coordonnées cylindriques d'un écoulement de type cyclone. On note  $a$  le rayon dit critique, et on plaçant une base de projection cylindrique d'axe vertical  $Oz$ . Le profil de vitesse obéit à :

$$\vec{v}(r, \theta) = \begin{cases} V_0 \frac{r}{a} \vec{u}_\theta, & \forall r \in [0, a] \\ V_0 \frac{a}{r} \vec{u}_\theta, & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Tracer le profil de vitesse de cet écoulement pour  $r \in [0, 2a]$ ,
4. Établir si cet écoulement est rotationnel ou irrotationnel.

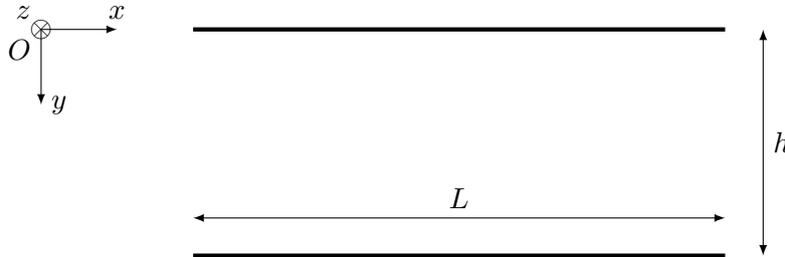
#### Données :

En coordonnées cylindriques :  $\operatorname{rot} \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right) \vec{u}_z$

### 6.1.5 Frottement visqueux dans un écoulement de Poiseuille plan

On donne l'expression du profil de vitesse d'un fluide circulant entre deux plaques planes de longueur  $L$  et de largeur  $\ell$ , distantes de  $h$ , lorsqu'il est soumis à un gradient de pression uniforme selon son axe d'écoulement  $\overrightarrow{\text{grad}} P = \frac{dP}{dx} = \frac{\Delta P}{L} = \text{cste}$  :

$$v(y) = \frac{\Delta P}{3\eta L} (h - y)y \vec{u}_x$$



1. Représenter le profil de vitesse en un plan  $x = \text{cste}$  quelconque.
2. Établir l'expression de la force de frottement subie par le fluide sur un élément de surface  $\delta S$ .
3. En déduire la force totale de frottement subie par le fluide dans la conduite.

### 6.1.6 Laminaire ou turbulent ?

Conclure sur le caractère laminaire ou turbulent des écoulements suivants :

1. Robinet d'eau ouvert et remplissant une bouteille de 1 L en 10 s ;
2. Bronchiole d'un diamètre de 1 mm traversée par un débit volumique d'air de  $1,5 \times 10^{-3} \text{ L} \cdot \text{min}^{-1}$ .

### 6.1.7 Bernoulli et une conduite horizontale de section constante

Soit une conduite horizontale de section  $S$  constante, alimentée en fluide incompressible de masse volumique  $\mu = \mu_0$  par un débit massique  $D_m$ . On suppose que le profil de vitesse dans toute section perpendiculaire à l'axe de la conduite est uniforme, de sorte que la pression est également uniforme sur chaque section.

1. Établir l'expression de la vitesse dans la section d'entrée.
2. Faire de même pour la section de sortie.
3. En déduire l'expression de la pression de sortie en fonction de celle de l'entrée.

### 6.1.8 Phénomène de Venturi

Soit une conduite horizontale de section  $S$  variable, alimentée en fluide incompressible de masse volumique  $\mu = \mu_0$  par un débit massique  $D_m$ . On suppose que le profil de vitesse dans toute section perpendiculaire à l'axe de la conduite est uniforme, de sorte que la pression est également uniforme sur chaque section.

La conduite a la forme de la figure 6.1.

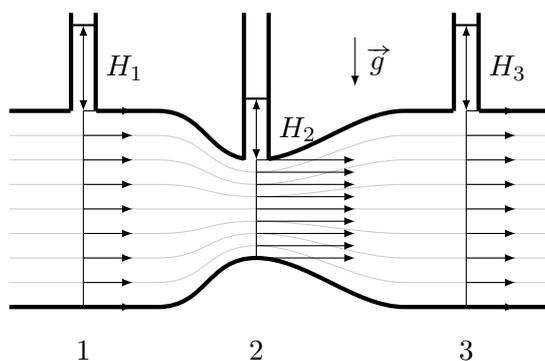


Fig. 6.1 – Mesure de débit par effet Venturi

1. Établir l'expression de la pression  $p_i$  qui règne dans la section  $i$  en fonction de  $p_0$ ,  $\mu_0$ ,  $g$  et  $H_i$ .
2. On note  $\Delta H = H_1 - H_2$ , relier la pression  $p_1$  à  $p_2$ ,  $\Delta H$ ,  $\mu_0$  et  $g$ .
3. Établir une première expression de  $v_2$  en fonction de  $v_1$  et de  $\Delta H$  et  $g$ .
4. En déduire une expression du ratio  $\frac{S_1}{S_2}$ .

### 6.1.9 Pompe à eau

On dispose d'une pompe de puissance indiquée  $\mathcal{P}_i$  et on cherche à amener de l'eau d'un lac de très grande surface libre  $S$  vers un récipient de surface libre  $S_r$ . La conduite est en charge, de section  $s \ll S_r$  à travers lequel circule un débit massique  $D_m$  d'un fluide qui peut être considéré comme parfait et incompressible. La figure schématise les deux installations décrites ainsi qu'une ligne de courant.

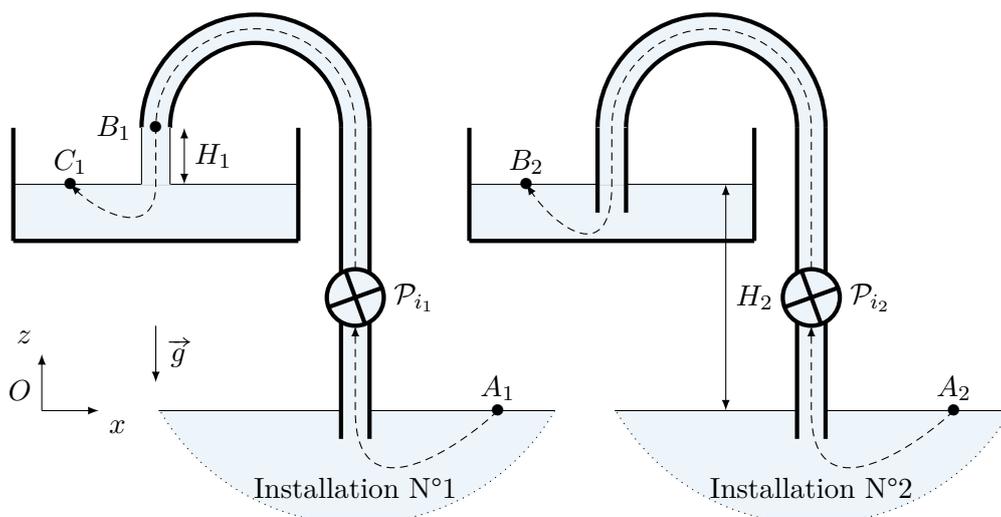


Fig. 6.2 – Installations de pompage

1. Pour l'installation N°1, exprimer la conservation du débit entre les points  $A_1$  et  $B_1$ . Conclure sur le rapport  $\frac{v(B_1)}{v(A_1)}$ .
2. Pour l'installation N°2, exprimer la conservation du débit entre les points  $A_2$  et  $B_2$ . Conclure sur le rapport  $\frac{v(B_2)}{v(A_2)}$ .
3. Les pressions en  $B_i$  sont égales à la pression atmosphérique. En déduire une expression de la puissance indiquée en fonction des hauteurs  $H_i$ , de  $g$ , du débit massique et de la section  $s$ .
4. Quel est l'installation la plus économique? En déduire la valeur du gain relatif.

#### Données :

$$D_m = 5 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}; \quad s = 10 \text{ cm}^2; \quad H_2 = 5 \text{ m};$$

## 6.2 Problèmes

### 6.2.1 Utilisation d'un siphon

On se propose de vider partiellement un réservoir parallélépipédique contenant un liquide de masse volumique uniforme  $\mu_0$  au moyen d'un siphon, c'est à dire d'un tube coudé de section constante  $s$ . On note  $S$  la section du réservoir.

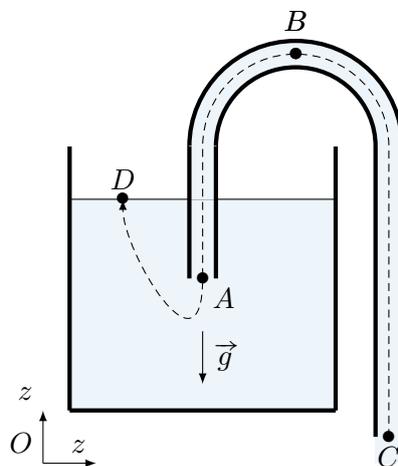


Fig. 6.3 – Siphon

Soient  $A$  le point d'entrée du siphon,  $B$  le point le plus haut du siphon,  $C$  la sortie du siphon et  $D$  un point de la surface libre dans le réservoir. On note  $z_A$ ,  $z_B$ ,  $z_C$  et  $z_D$  les coordonnées correspondantes. La surface libre du réservoir et l'extrémité  $C$  du siphon sont à la pression atmosphérique notée  $p_{\text{atm}}$ .

1. Considérant que  $s \ll S$ , que peut-on dire de la vitesse au point  $C$  ?
2. Exprimer la vitesse du fluide à la sortie du siphon. En déduire une condition pour que le fluide s'écoule.
3. Exprimer les pressions  $p_A$  et  $p_B$  dans le fluide aux points  $A$  et  $B$  ? Que faut-il faire pour amorcer le siphon ? La hauteur du point  $B$  peut-elle être quelconque ?
4. Étudier les variations de  $z_D$  en fonction du temps.

#### Données :

$$z_A = 5 \text{ cm}; z_B = 70 \text{ cm}; z_C = -10 \text{ cm}; z_D(t = 0) = 60 \text{ cm}; \mu_0 = 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}; S = 1 \text{ m}^2; s = 1 \text{ cm}^2$$

### 6.2.2 Perte de charge

Une citerne alimente un réseau d'eau selon la figure 6.4 présentant des coudes, et une réduction de section brusque. On note  $h$  la hauteur entre la surface libre dans la citerne et la sortie à l'atmosphère.

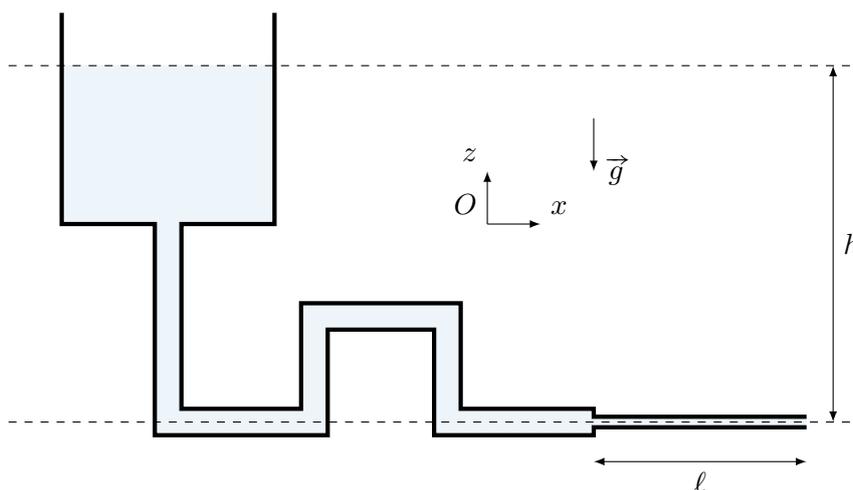


Fig. 6.4 – Structure du réseau d'eau

On note  $L$  la longueur totale de la conduite de grand diamètre  $D$ , parcourue par le fluide à la vitesse  $V$ , et  $\ell$  celle de petit diamètre  $d$ , parcourue à la vitesse  $v$ .

1. On suppose qu'un bouchon placé à l'extrémité du réseau empêche le fluide de s'écouler. Quelle est la pression supportée par ce bouchon ?
2. En négligeant toute perte de charge, quelle hauteur minimale doit-on donner au réseau d'eau pour obtenir un débit  $Q$  en sortie ? Faire l'application numérique.

Une perte de charge régulière s'exprime par  $\Delta p_r = K_r \frac{L_r}{D_r} \frac{1}{2} \mu_0 v^2$  où  $L_r$  est la longueur du tuyau et  $D_r$  son diamètre, et une perte de charge singulière s'exprime par  $\Delta p_s = K_s \frac{1}{2} \mu_0 v^2$ .

3. Exprimer la hauteur de perte de charge singulière totale  $h_s$  en fonction de  $V$ ,  $g$  et d'un facteur numérique.
4. Exprimer la hauteur de perte de charge régulière dans les diverses conduites  $h_r$  en fonction des mêmes paramètres.
5. En déduire la hauteur de perte de charge totale  $h_{\text{tot}}$ , puis l'expression et la valeur de la hauteur minimale  $h_\eta$  pour que le fluide s'écoule avec un débit volumique  $Q$ .

**Données :**

$K_{\text{coude à } 90^\circ} = 1,5$ ;  $K_{\text{rétrecissement}} = 0,25$ ;  $K_r = 2,5 \cdot 10^{-2}$ ;  $L = 60 \text{ m}$ ;  $\ell = 10 \text{ m}$ ;  $D = 4,5 \text{ cm}$ ;  $d = 2 \text{ cm}$ ;  $\mu_0 = 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ;  $Q = 1 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$ .

6.2.3 Jet d'eau dans l'air

De l'eau circule dans un coude et sort sous forme de jet vers le haut à travers une buse (voit figure 6.5). Un manomètre à mercure est placé en un point  $S$  de la tuyauterie horizontale, en amont du coude. On négligera les frottements dans le fluide, et on négligera l'effet de la pesanteur dans l'épaisseur du tube horizontal.

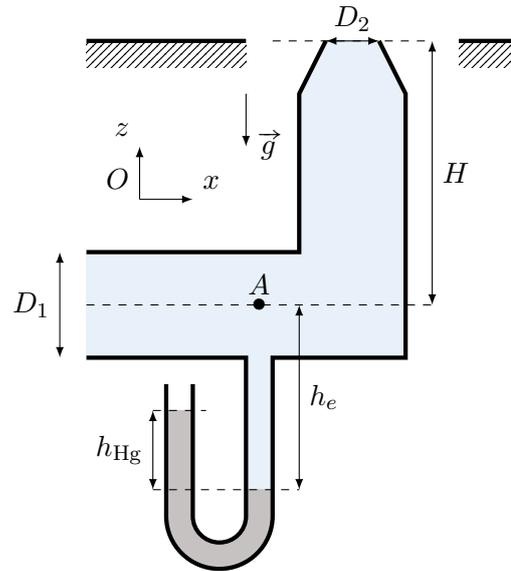


Fig. 6.5 – Buse à jet d'eau

1. Exprimer l'élévation  $h_{Hg}$  du mercure en fonction de la pression en  $A$  et des données du problème.
2. On note  $Q$  le débit volumique entrant par la section de diamètre  $D_1$ , exprimer la vitesse de l'eau en sortie de buse en fonction des données du problème, puis calculer sa valeur.

La présence d'un coude entraîne une perte de charge que l'on peut modéliser par une perte de pression  $\Delta p^* = K_s \frac{1}{2} \mu_0 v^2$ .

3. Comment qualifie-t-on cette perte de charge ?
4. En déduire la nouvelle valeur de la vitesse de l'eau en sortie de buse.
5. Le dispositif sert de système d'arrosage et est placé à raz du sol. A l'aide d'arguments de mécanique du point, déterminer la masse d'eau présente en l'air à tout instant ?

**Données :**

$\mu_{Hg} = 13\,400 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ;  $K_{\text{rétrécissement}} = 0,25$ ;  $D_1 = 3 \text{ cm}$ ;  $D_2 = 1,5 \text{ cm}$ ;  $H = 20 \text{ cm}$ ;  $h_e = 10 \text{ cm}$ ;  
 $h_{Hg} = 5 \text{ cm}$ ;  $\mu_0 = 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

6.2.4 Sténose artérielle

On étudie la circulation sanguine dans une artère moyenne saine modélisée par un cylindre de longueur  $L_1 + L_2 + L_1 = 7 \text{ cm}$ , avec  $L_1 = L_2$  et de rayon  $R_1 = 0,7 \text{ cm}$ . Cette artère est parcourue par du sang, de masse volumique  $\mu_0 = 1 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et de viscosité  $\eta = 6 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ , et de vitesse débitante  $v_0 = 10 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ .

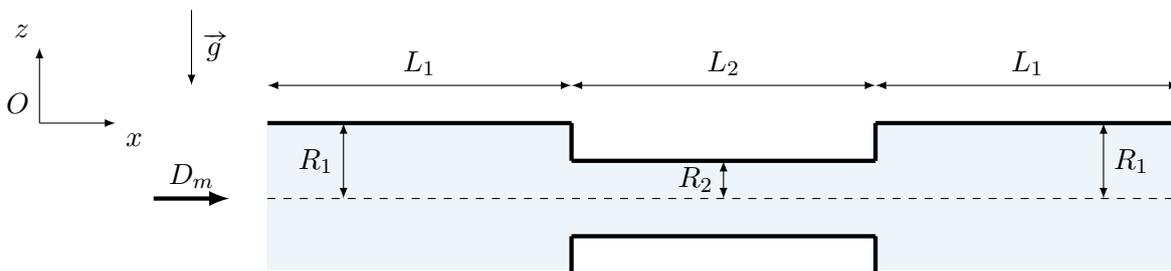


Fig. 6.6 – Schématisation d'une sténose artérielle

On suppose dans un premier temps que le sang est un fluide parfait. Une portion de cette artère est le siège d'une sténose dont l'effet est de réduire le rayon de l'artère à une valeur  $R_2 = \frac{R_1}{2}$ . Le tronçon

artériel étudié est tel que représenté sur le schéma 6.6.

1. Par application de la relation de BERNOULLI, en déduire la dépression qui règne entre  $A$  et  $B$ .
2. Quel risque cette dépression peut faire courir à un malade ?

On prend maintenant en compte les effets de la viscosité sur l'écoulement. On donne l'expression du débit volumique  $D_v = \frac{\pi R^4}{8\eta L} \Delta P$ , valable pour un écoulement laminaire.

3. Par analogie avec la loi d'OHM, en déduire l'expression de la résistance hydraulique  $R_H$  de cette artère.
4. Déterminer les expressions des résistances hydrauliques  $R_{H_1}$  d'une section saine de longueur  $L_1$  et  $R_{H_2}$  de la portion sténosée. En déduire celle de l'artère complète  $R_{H_{sténose}}$ .
5. Comparer le débit artériel  $D_{sain}$  et  $D_{sténose}$ . Conclure.

Un pontage artériel consiste à créer une dérivation en parallèle de la sténose en utilisant une tubulure de rayon  $R_3$  de façon à retrouver le débit initial.

6. En déduire le rayon  $R_3$  nécessaire pour réaliser ce pontage.

### 6.2.5 Vidange de Torricelli

Soit un réservoir cylindrique de section  $S$ , initialement rempli d'eau avec une hauteur  $H_0$ . On perce au fond de ce réservoir (en  $B$ ) un orifice de section  $s \ll S$ . On modélise l'eau par un fluide parfait et incompressible.

1. En déduire qu'en régime permanent, la vitesse de l'eau en  $B$ , notée  $v_B \gg v_A$ .
2. En appliquant la relation de BERNOULLI, montrez que le débit volumique sortant du cylindre s'exprime par  $D_v = s\sqrt{2gH(t)}$ .
3. Établir l'équation différentielle en  $H(t)$  qui régit la vidange du réservoir.
4. En déduire le temps de vidange  $T$ .

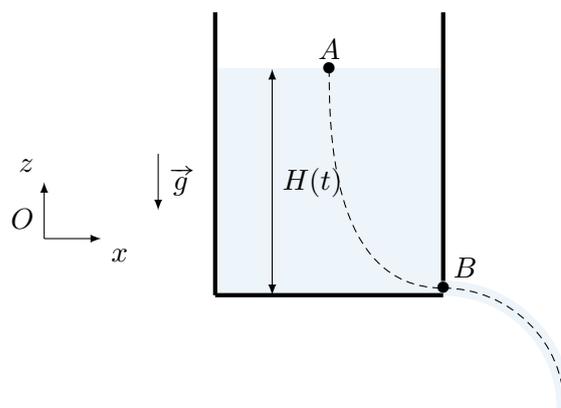


Fig. 6.7 – Vidange de TORRICELLI

### 6.2.6 Tube de Pitot

Les tubes de PITOT sont des capteurs de vitesse basés sur une mesure de différentiel de pression. Le dispositif est représenté en figures 6.8 et 6.9.

Sur le schéma 6.9, on note la présence de deux orifices permettant de mesurer une première pression, notée  $p_{\text{tot}}$  pour pression totale, et une seconde, notée  $p_{\text{stat}}$  pour pression statique. Les deux orifices communiquent via un manomètre différentiel à mercure. La différence de pression entre les deux orifices se déduit de la hauteur  $\Delta H$ .

On note  $\mu_{Hg}$  la masse volumique du mercure,  $\mu_0$  celle de l'air,  $p_0$  la pression atmosphérique et  $V_\infty$  la vitesse relative du vent aérodynamique.



Fig. 6.8 – Tube de PITOT monté sur une aile d'avion

1. Etablir un lien entre  $p_{\text{tot}}$ ,  $p_{\text{stat}}$ ,  $\mu_{Hg}$  et  $\Delta H$ .

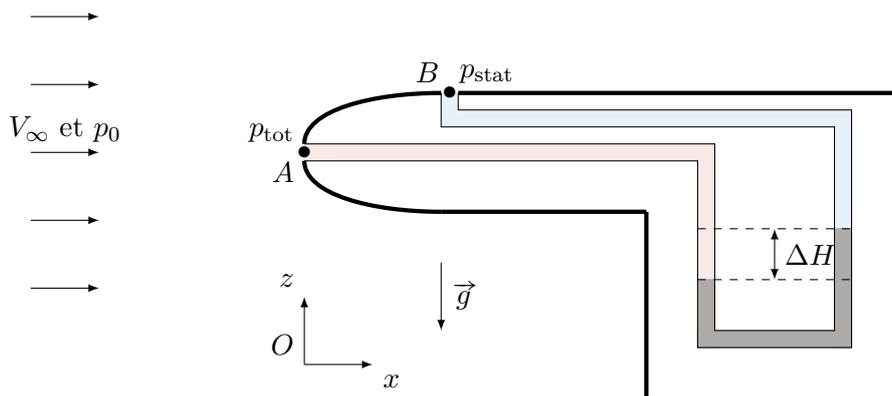


Fig. 6.9 – Schéma de fonctionnement

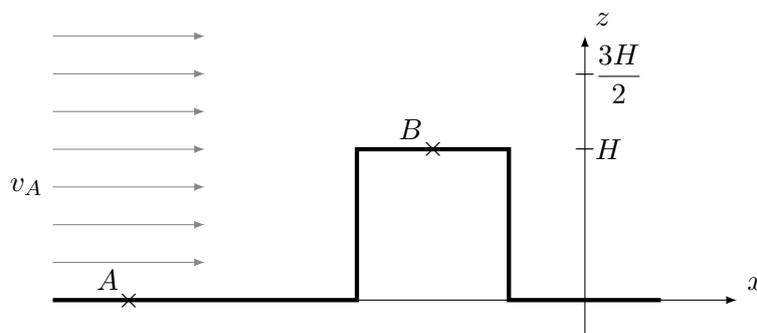
2. En supposant une symétrie parfaite des lignes de courant autour du nez du tube de PITOT, en déduire l'existence d'une ligne de courant amenant au point A appelé « point d'arrêt ».
3. En déduire une expression de  $p_{\text{tot}}$  en fonction de  $p_0$ ,  $\mu_0$  et  $V_\infty$ .
4. En traçant la ligne de courant passant par B, en déduire une expression de  $p_{\text{stat}}$ .
5. En déduire que :

$$V_\infty = \sqrt{\frac{2\mu_{Hg}g\Delta H}{\mu_0}}$$

## 6.3 Oral Banque PT

### 6.3.1 Écoulement sur un obstacle

On suppose qu'un fluide parfait, et incompressible s'écoule en régime permanent sur un obstacle, de largeur  $L$  suffisamment grande pour être considérée infinie, tel que représenté ci-dessous. Au-delà de l'altitude  $z = \frac{3H}{2}$ , les lignes de courant ne sont plus affectées par la présence de l'obstacle.



1. Établir deux relations entre  $v_A$  et  $v_B$ , puis entre  $v_A$ ,  $v_B$ ,  $p_A$  et  $p_B$ .
2. Compléter le tracé des lignes de courant du schéma, en tenant compte des remarques de l'énoncé.
3. Établir l'expression de la pression en  $B$ .
4. Une partie du toit est constitué d'une simple plaque de surface  $S$  et de masse  $m$ . En déduire l'expression de la vitesse du vent en  $A$  permettant de soulever cette plaque.

### 6.3.2 Lubrification simplifiée

On place un fluide de viscosité  $\eta$  entre deux plaques distantes d'une hauteur  $e$ . La plaque inférieure est immobile tandis que la plaque supérieure est en mouvement de translation rectiligne uniforme à une vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ .

1. Quelles sont les conditions aux limites de l'écoulement du fluide ?
2. Donner la forme mathématique la plus simple permettant de décrire l'écoulement du fluide à travers son champ de vitesse.
3. Quelle force exerce le fluide sur la plaque supérieure ?

Un bloc cubique de côté  $a = 10$  cm et de masse  $m = 300$  g glisse sur une plaque plane inclinée de  $45^\circ$  par rapport au sol. Un fluide de viscosité  $\eta$  se trouve entre le bloc et la plaque sur une épaisseur de  $e = 3$  mm. On reprend la forme la plus simple de l'écoulement définie à la première partie.

4. Déterminer l'équation de mouvement du bloc.
5. Au bout d'un certain temps, la vitesse du bloc se stabilise à une vitesse  $v = 0,06$  m  $\cdot$  s $^{-1}$ . Calculer la viscosité  $\eta$  du fluide.
6. Quelle est la durée du régime transitoire ?

## 6.4 Annales

### 6.4.1 Etude de l'alimentation en eau d'une maison

[2015 PT B]

On considère une alimentation domestique en eau via un château d'eau. Le réservoir a une section  $S_0 = 25 \text{ m}^2$  et est ouvert en haut sur l'atmosphère. Celui-ci débouche sur une canalisation horizontale de section  $s = 1 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ . La hauteur de la surface libre de l'eau par rapport au sol est  $h = 20 \text{ m}$  (figure 6.10).

On considère que cette canalisation alimente une installation domestique qui comporte un robinet ouvrant sur l'air atmosphérique via une ouverture de même section  $s$ .

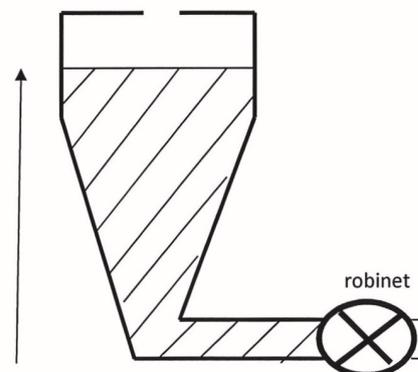


Fig. 6.10

1. Justifier que la vitesse d'écoulement de l'eau au niveau de la surface libre est négligeable devant la vitesse dans la canalisation.
2. Calculer numériquement la vitesse de l'eau en sortie du robinet en négligeant les pertes de charge.
3. Calculer numériquement le débit volumique.
4. Au niveau de la canalisation horizontale, il y a perte de charge. Expliquer ce que cela signifie et en donner les causes. Exprimer alors le théorème de BERNOULLI en introduisant une caractéristique des pertes de charge.
5. Sur la canalisation horizontale on place deux tubes verticaux remplis d'eau séparés de 10 m. On mesure une différence de hauteur de 2 cm. En déduire la perte de charge due au tuyau d'alimentation.



Fig. 6.11

6. Quelle est désormais la vitesse de l'eau en sortie du robinet situé à 1 km du château d'eau ?
7. On souhaite trouver en sortie la vitesse déterminée à la question 2. Pour cela on installe avant le robinet une pompe dont on déterminera la puissance.

### 6.4.2 Vidange de citerne

[2016 E3A PSI]

La citerne est munie d'un orifice par lequel le gazole peut s'écouler. On suppose que toutes les conditions sont réunies pour qu'on puisse appliquer la relation de BERNOULLI entre un point  $A$  de la surface libre du gazole et un point  $B$  au niveau de l'ouverture (voir figure 6.12) :

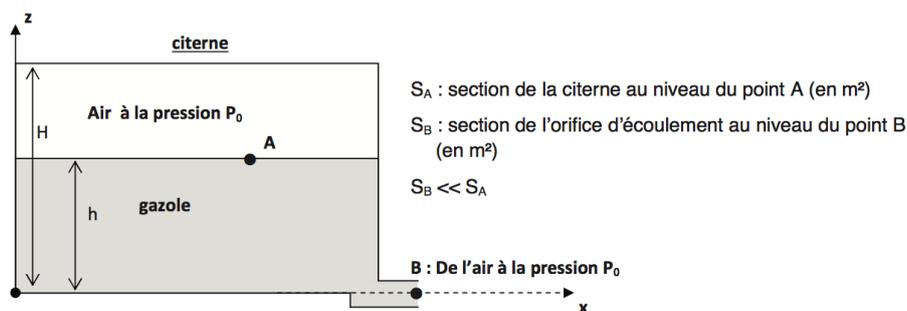


Fig. 6.12

### Écoulement parfait

1. Quelles sont les conditions d'application de la relation de BERNOULLI ?
2. Comment se traduit la conservation de la masse lors de l'écoulement ? En déduire une relation entre les vitesses moyennes en A et B.
3. Sachant que la section en A est nettement plus grande que celle en B, exprimer la vitesse moyenne  $V_B$  de l'écoulement en B à l'aide de  $h$  et  $g$ .
4. La citerne est initialement pleine. Exprimer le temps nécessaire  $T$  pour la vidanger complètement, à l'aide de  $S_A$ ,  $S_B$ ,  $H$  et  $g$ . Calculer  $T$ .

### Prise en compte d'une perte de charge singulière

Au niveau du convergent (rétrécissement de section sur la ligne de courant  $AB$ ), on constate une zone de perturbation caractérisée énergétiquement par une « perte de charge singulière » : le bilan d'énergie se traduit par une perte d'énergie mécanique volumique modélisable par la formule suivante :

$$\frac{1}{2}\rho (V_B^2 - V_A^2) + \rho g(z_B - z_A) + (p_B - p_A) = -\frac{1}{2}K_c \rho V_B^2 \text{ avec } K_c \simeq 0,55$$

5. Déterminer une nouvelle expression de  $V_B$  en tenant compte de la perte de charge singulière.
6. Exprimer à nouveau le temps nécessaire  $T'$  pour vidanger complètement la citerne, à l'aide de  $T$  et  $K_c$ . Calculer  $T'$ . Commenter.

### Remplissage du réservoir d'une voiture

On utilise une pompe centrifuge pour déplacer le gazole de la citerne au réservoir d'une voiture.

Le schéma suivant modélise simplement le circuit du fluide (la citerne étant enterrée, on a bien évidemment  $z_E > z_A$ ). La « perte de charge singulière » (due à la dissipation d'énergie à cause des coudes, des raccords entre canalisations de diamètres différents...) est définie par  $\Delta p_s = K \frac{1}{2}\rho V_{\text{moy}}^2$  où  $K$  est une constante sans dimension dépendant de la nature de la singularité rencontrée. On admettra que la pompe utilisée ici génère une perte de charge singulière de coefficient  $K_{\text{pompe}} = 6$ .

La « perte de charge régulière » est définie par  $\Delta p_r = \lambda \frac{1}{2}\rho V_{\text{moy}}^2 \frac{l}{d}$  où  $\lambda$  est une constante sans dimension dépendant de la nature de l'écoulement et de la rugosité de la conduite,  $l$  la longueur de la conduite et  $d$  son diamètre.

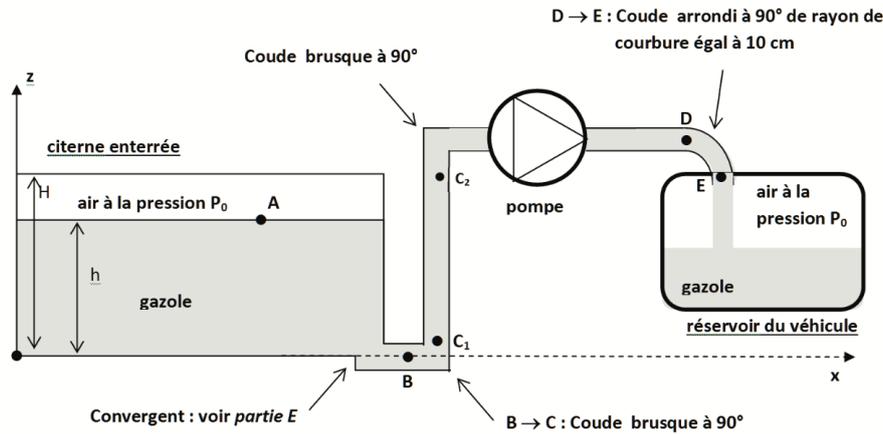


Fig. 6.13 – La notation « partie E » fait référence à la partie 6.4.2

7. Utiliser le document 6.14 intitulé « Données numériques » pour déterminer la valeur numérique du coefficient  $K_{\text{total}}$  correspondant à l'ensemble des singularités détaillées sur le schéma ci-dessus. On prendra soin de préciser les différents termes intervenant dans  $K_{\text{total}}$ .
8. Calculer la valeur totale des pertes de charge singulières  $\Delta p_{s,\text{tot}}$  à l'aide des données numériques fournies en figure 6.14.
9. La totalité des longueurs droites de la conduite vaut approximativement  $l = 10$  m. On admettra la valeur suivante pour le coefficient de perte de charge régulière :  $\lambda = 2,45 \times 10^{-2}$ . Calculer la valeur totale des pertes de charge régulière  $\Delta p_{r,\text{tot}}$  à l'aide des données numériques fournies en figure 6.14.

L'insertion d'un élément actif (ici la pompe électrique) dans le circuit du fluide modifie le bilan énergétique appliqué au gazole. En tenant compte des pertes de charge, on admet la relation suivante appliquée entre les points A et E :

$$\frac{1}{2}\rho (V_E^2 - V_A^2) + \rho g(z_E - z_A) + (p_E - p_A) = -(\Delta p_{r,\text{tot}} + \Delta p_{s,\text{tot}}) + \frac{P_u}{Q_V}$$

où  $P_u$  est la puissance utile fournie par la pompe au fluide et  $Q_V$  est le débit volumique.

10. Calculer le débit volumique dans les conduites  $Q_V$  à l'aide des données numériques fournies en figure 6.14.
11. Sachant que la pompe a un rendement de 80%, déterminer l'expression de  $P_e$ , puissance électrique alimentant la pompe. Calculer  $P_e$  (on prendra  $z_E - z_A \simeq 5$  m).

## DONNEES NUMÉRIQUES

**Pour la première partie:**

Permittivité du vide :	$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$
Permittivité relative du gazole :	$\epsilon_r = 5,00$
Hauteur du capteur capacitif :	$H = 1,00 \text{ m}$
Largeur du capteur capacitif :	$L = 4,00 \text{ cm}$
Distance entre les armatures :	$e = 3,00 \text{ mm}$

**Pour la seconde partie:**

Section de la citerne au point A :	$S_A = 1,00 \text{ m}^2$
Section de l'ouverture au point B :	$S_B = 1,00 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$
Rayon des sections des conduites et des coudes :	$a = 1,80 \text{ cm}$
Intensité du champ de pesanteur :	$g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$
Masse volumique du gazole :	$\rho = 840 \text{ kg.m}^{-3}$
Viscosité dynamique du gazole :	$\eta = 5 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$
Vitesse moyenne des les conduites :	$V_{\text{moy}} = 4,50 \text{ m.s}^{-1}$

Coefficient K pour les pertes de charge singulière :

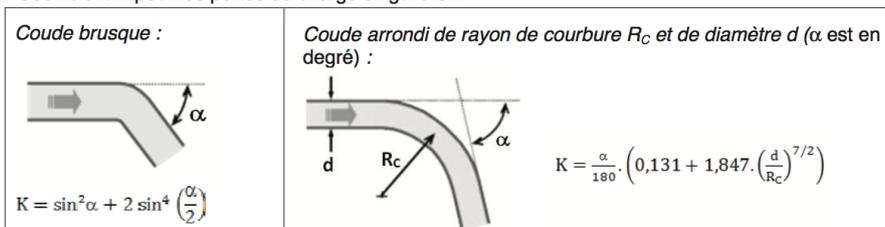


Fig. 6.14 – Données numériques