# 4 Systèmes de coordonnées

## 4.1 Coordonnées cartésiennes

### 4.1.1 Point $M$ et base de projection

Le point $M$ est représenté ci-dessous dans une base de projection cartésienne d'origine $O$ et d'axe $Ox$, $Oy$ et $Oz$.

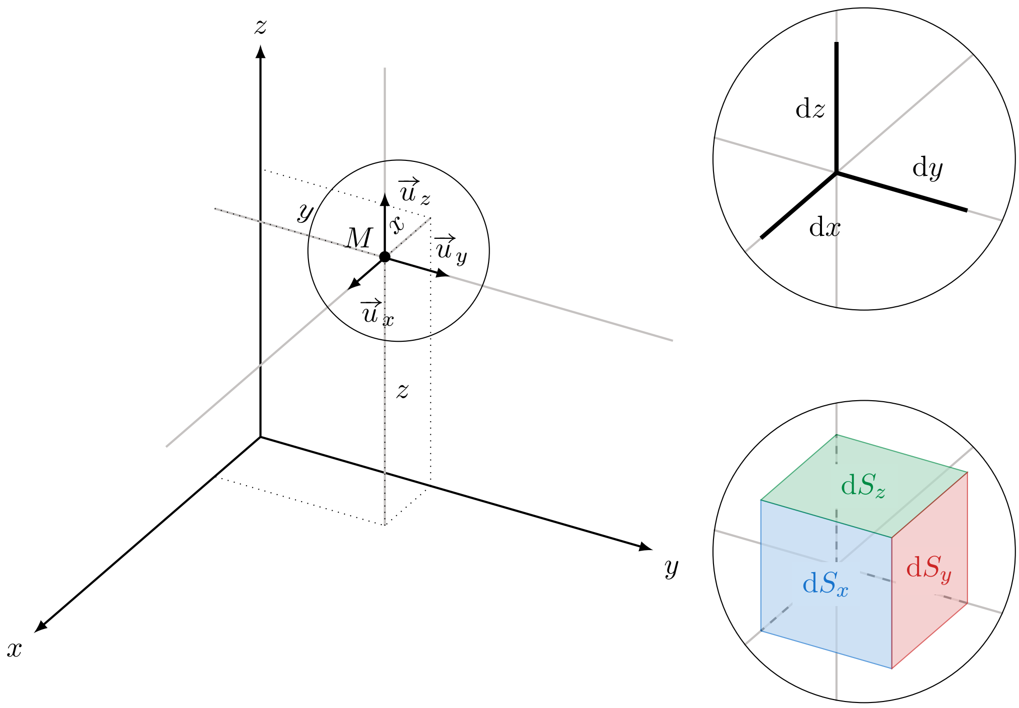


**Fig. 4.1** – Coordonnées cartésiennes

### 4.1.2 Coordonnées, déplacement, surface et volume élémentaires

Dans une base cartésienne, le point $M$, qui matérialise généralement le système ponctuel étudié, a pour coordonnées :

$$\boxed{M(x,y,z) \Longleftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z}$$

Un déplacement élémentaire (infinitésimal) de ce point $M$ se note alors :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{\mathrm{d}OM} = \mathrm{d}x\,\vec{u}_x + \mathrm{d}y\,\vec{u}_y + \mathrm{d}z\,\vec{u}_z}$$

Les surfaces élémentaires s'en déduisent :

$$\boxed{\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{d}S_x} = \mathrm{d}y\mathrm{d}z\,\vec{u}_x \\ \overrightarrow{\mathrm{d}S_y} = \mathrm{d}x\mathrm{d}z\,\vec{u}_y \\ \overrightarrow{\mathrm{d}S_z} = \mathrm{d}x\mathrm{d}z\,\vec{u}_z \end{cases}}$$

Enfin, le volume élémentaire est alors :

$$\boxed{\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}$$

On résume tout cela dans le tableau ci-dessous :

| Déplacement élémentaire | Surfaces élémentaires | Volume élémentaire |
|---|---|---|
| $\overrightarrow{d\ell} = \mathrm{d}x\vec{u}_x + \mathrm{d}y\vec{u}_y + \mathrm{d}z\vec{u}_z$ | $\mathrm{d}S_x = \mathrm{d}y\mathrm{d}z$<br>$\mathrm{d}S_y = \mathrm{d}x\mathrm{d}z$<br>$\mathrm{d}S_z = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ | $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ |

## 4.2 Coordonnées cylindriques

### 4.2.1 Point $M$ et base de projection

Le point $M$ est représenté ci-dessous dans un base de projection cylindrique d'origine $O$. La base de projection cartésienne $(Oxyz)$ y est également représentée pour référence.

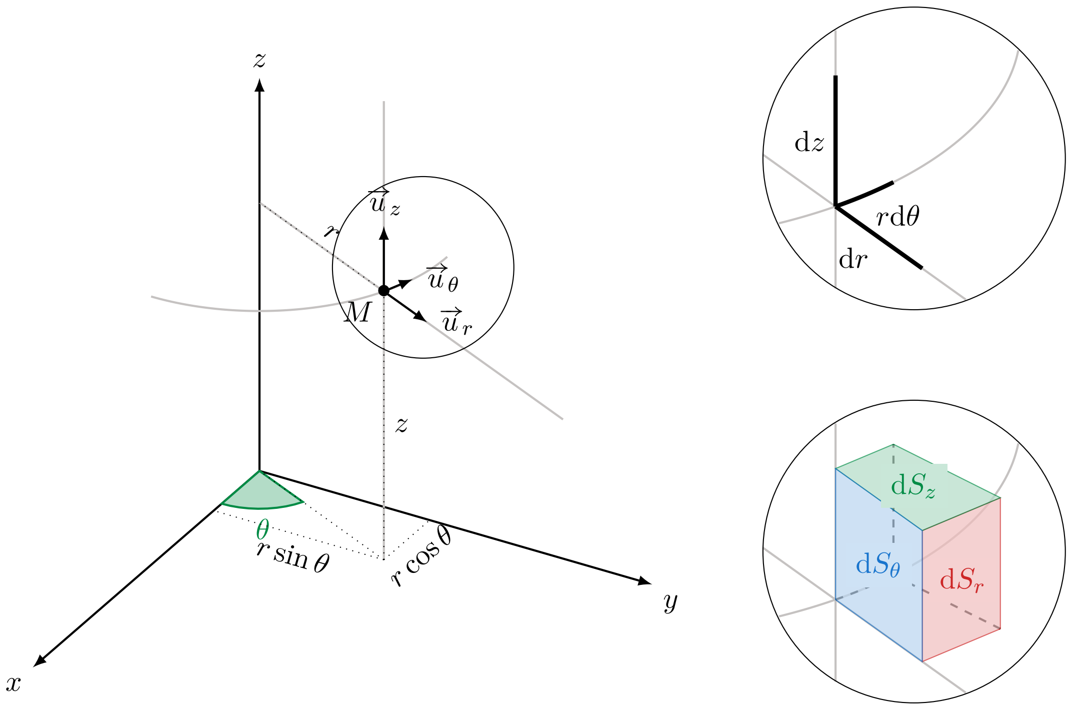


**Fig. 4.2** – Coordonnées cylindriques

### 4.2.2 Coordonnées, déplacement, surface et volume élémentaires

Dans une base cylindrique, le point $M$, qui matérialise généralement le système ponctuel étudié, a pour coordonnées :

$$\boxed{M(r, \theta, z) \iff \overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r + z\,\vec{u}_z}$$

Un déplacement élémentaire (infinitésimal) de ce point $M$ se note alors :

$$\boxed{\overrightarrow{d\ell} = \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{\mathrm{d}OM} = \mathrm{d}r\,\vec{u}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_\theta + \mathrm{d}z\,\vec{u}_z}$$

Les surfaces élémentaires s'en déduisent :

$$\boxed{\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{d}S_r} = r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\,\vec{u}_r \\ \overrightarrow{\mathrm{d}S_\theta} = \mathrm{d}r\mathrm{d}z\,\vec{u}_\theta \\ \overrightarrow{\mathrm{d}S_z} = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_z \end{cases}}$$

Enfin, le volume élémentaire est alors :

$$\boxed{\mathrm{d}V = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z}$$

On résume tout cela dans le tableau ci-dessous :

| Déplacement élémentaire | Surfaces élémentaires | Volume élémentaire |
|---|---|---|
| $\overrightarrow{d\ell} = \mathrm{d}r\,\vec{u}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_\theta + \mathrm{d}z\,\vec{e_z}$ | $\mathrm{d}S_r = r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$<br>$\mathrm{d}S_\theta = \mathrm{d}r\mathrm{d}z$<br>$\mathrm{d}S_z = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ | $\delta V = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$ |

## 4.3 Coordonnées sphériques

### 4.3.1 Point $M$ et base de projection

Le point $M$ est représenté ci-dessous dans un base de projection sphérique d'origine $O$. La base de projection cartésienne $(Oxyz)$ y est également représentée pour référence.

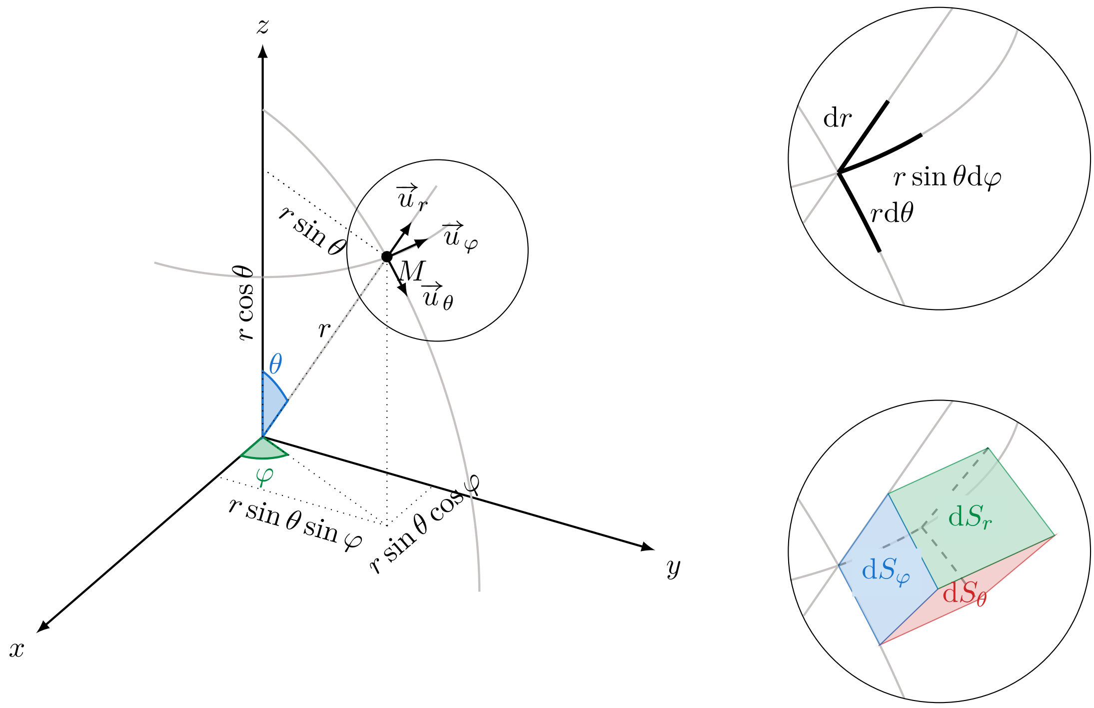


**Fig. 4.3** – Coordonnées sphériques

### 4.3.2 Coordonnées, déplacement, surface et volume élémentaires

Dans une base sphérique, le point $M$, qui matérialise généralement le système ponctuel étudié, a pour coordonnées :

$$\boxed{M(r,\theta,\phi) \Longleftrightarrow \overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r}$$

Un déplacement élémentaire (infinitésimal) de ce point $M$ se note alors :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{\mathrm{d}OM} = \mathrm{d}r\,\vec{u}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_\theta + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\,\vec{u}_\varphi}$$

Les surfaces élémentaires s'en déduisent :

$$\boxed{\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{d}S_r} = r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \vec{u}_r \\ \overrightarrow{\mathrm{d}S_\theta} = r \sin\theta \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \vec{u}_\theta \\ \overrightarrow{\mathrm{d}S_\varphi} = r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \vec{u}_\varphi \end{cases}}$$

Enfin, le volume élémentaire est alors :

$$\boxed{\mathrm{d}V = r^2 \sin\theta \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi}$$

On résume tout cela dans le tableau ci-dessous :

| Déplacement élémentaire | Surfaces élémentaires | Volume élémentaire |
|---|---|---|
| $\overrightarrow{d\ell} = \mathrm{d}r\overrightarrow{e_r} + r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_\theta} + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\overrightarrow{e_\varphi}$ | $\mathrm{d}S_r = r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi$<br>$\mathrm{d}S_\theta = r \sin\theta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r$<br>$\mathrm{d}S_\varphi = \mathrm{d}r r \mathrm{d}\theta$ | $\delta V = r^2 \sin\theta \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi$ |