1 Notion de différentielle

1.1 Dérivée partielle d'une fonction à plusieurs variables

On rencontre régulièrement en physique des fonctions de plusieurs variables, spatiales ou non. La notion de dérivée doit être étendue à ces nouvelles fonctions.

Dérivée partielle

Soit une fonction de trois variables $f : M(x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$. On appelle dérivée partielle de f par rapport à x en $M(x,y,z)$, la dérivée de la fonction $f : M(x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$ par rapport à la variable x en considérant y et z comme des constantes. On note :

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{y,z}(x,y,z) = \lim_{\mathrm{d}x \to 0} \frac{f(x+\mathrm{d}x,y,z) - f(x,y,z)}{\mathrm{d}x}$$

1.2 Différentielle d'une fonction à plusieurs variables

Différentielle d'une fonction

Soit une fonction de trois variables $f : M(x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$. On appelle différentielle de f, la variation infinitésimale de la fonction f : $\mathrm{d}f : M(x,y,z) \mapsto f(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z) - f(x,y,z)$. On admettra qu'à l'ordre 1 en $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}z$, elle s'écrit :

$$\mathrm{d}f = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{y,z} \mathrm{d}x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,z} \mathrm{d}y + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{x,y} \mathrm{d}z$$

Remarque

- Ces deux définitions s'étendent aux fonctions de N variables en considérant constantes toutes les variables autres que celle par rapport à laquelle on dérive ;
- la notation $|_{y,z}$ est parfois omise lorsqu'il ne peut y avoir de confusion.

1.3 Développement de Taylor

La notion d'élément mésoscopique est centrale dans le programme de deuxième année de CPGE. Les approximations permises par cette notion tournent autour du développement de Taylor.

Développement de Taylor

Soit f une fonction de l'intervalle réel I dans E un espace vectoriel normé, n fois dérivable en a un élément de I, alors la formule de TAYLOR s'écrit :

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)\frac{(x-a)}{1!} + \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

Remarque

Cette relation sera souvent exploitée sous la forme :

$$f(x+\mathrm{d}x, y, \ldots) = f(x, y, \ldots) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{y,\ldots} \mathrm{d}x + \mathcal{O}(x^2) \simeq f(x, y, \ldots) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{y,\ldots} \mathrm{d}x$$

1.4 Développements limités

On considère un paramètre x sans dimension, tel que $x \ll 1$. Les développements limités sont rarement utilisés au-delà de l'ordre 1 en physique, et nous nous limiterons à cet ordre dans les exemples suivants :

- les fonctions exponentielle et logarithme :

$$\boxed{\ln(1+x) \simeq x \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^x \simeq 1+x}$$

- les fonctions trigonométriques [1] :

$$\boxed{\cos x \simeq 1 \qquad \text{et} \qquad \sin x \simeq x \qquad \text{et} \qquad \tan x \simeq x}$$

- lois puissance :

$$\boxed{(1+x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x \qquad \text{si } \alpha \neq 0}$$

1. La fonction $x \mapsto \cos x$ demande parfois un développement limité à l'ordre 2 : $\cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{2}$