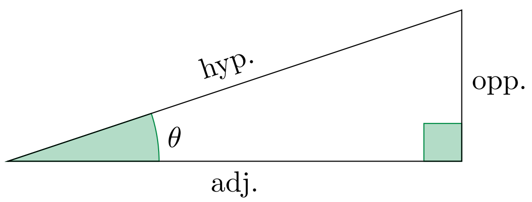
3 Trigonométrie usuelle

Les divers problèmes abordés en physique de première et deuxième année de CPGE font fréquemment appel aux relations trigonométriques :
- les projections de vecteur de mécanique nécessitent une bonne maîtrise des relations entre longueurs et angles du triangle rectangle, et des règles de composition d'angles simples à travers le « cercle trigonométrique » ;
- la partie physique ondulatoire de deuxième année fait fréquemment appel à la linéarisation de produits de fonctions sinusoïdales ou, au contraire, à la factorisation de sommes des mêmes fonctions.

3.1 Cercle trigonométrique et angles remarquables

Les projections de vecteur font usage des règles suivantes :



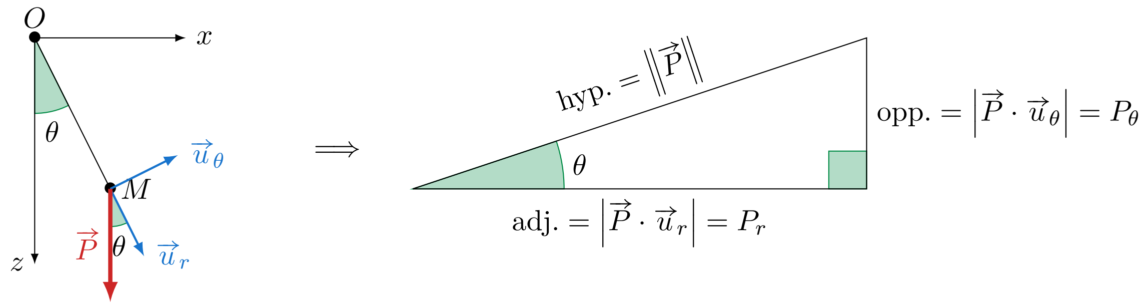
$$\boxed{\cos\theta = \frac{\text{adj.}}{\text{hyp.}} \qquad \sin\theta = \frac{\text{opp.}}{\text{hyp.}} \qquad \tan\theta = \frac{\text{opp.}}{\text{adj.}}}$$

où « adj. » signifie *côté adjacent* à l'angle θ, « opp. » signifie *côté opposé* à l'angle θ, et « hyp. » signifie *hypoténuse* du triangle rectangle.

Dans ces conditions, l'opération de projection d'un vecteur sur une base de projection revient bien souvent à trouver si la projection recherchée est le côté adjacent ou opposé à l'angle θ. Une fois l'angle et les projections identifiées, on n'oubliera pas que les relations trigonométriques ci-dessus utilisent des longueurs et des angles inférieurs à $\pi/2$. Le caractère algébrique d'une projection doit alors être ajoutée « à la main » a postériori.

Exemple

On cherche à projeter le vecteur $\vec{P} = P\vec{u}_z$ du pendule simple dans la base de projection polaire représentée en M.



On en déduit :

$$\cos\theta = \frac{P_r}{\left\|\vec{P}\right\|} \qquad \sin\theta = \frac{P_\theta}{\left\|\vec{P}\right\|}$$

On en tire alors, en ajoutant « visuellement » le signe :

$$\boxed{\vec{P} = \left\|\vec{P}\right\| \cos\theta\, \vec{u}_r - \left\|\vec{P}\right\| \sin\theta\, \vec{u}_\theta}$$

Les compositions d'angle sont également des outils pratiques, et le cercle trigonométrique permet de retrouver rapidement les diverses équivalences.

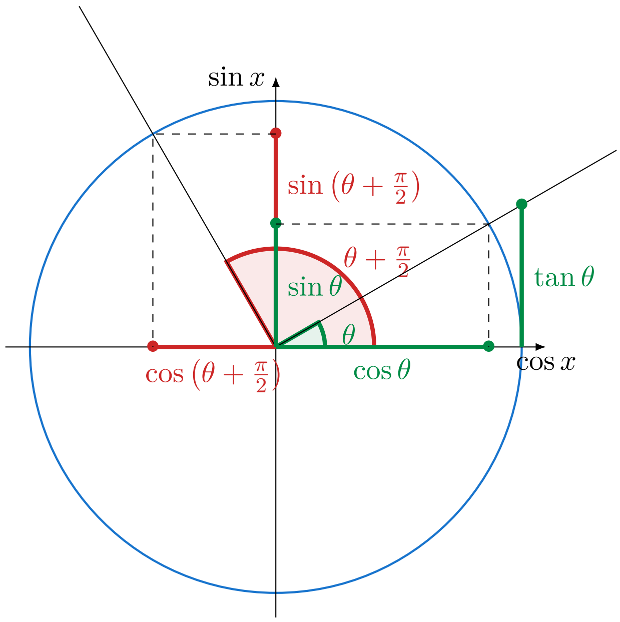


Fig. 3.1 – Cercle trigonométrique

$x =$	$\theta + \frac{\pi}{2}$	$\theta + \pi$	$\theta - \frac{\pi}{2}$
$\sin(x) =$	$\cos(\theta)$	$-\sin(\theta)$	$-\cos(\theta)$
$\cos(x) =$	$-\sin(\theta)$	$-\cos(\theta)$	$\sin(\theta)$

Tab. 3.1 – Composition d'angles simple

3.2 Addition

Le cas général des compositions d'angle quelconque est résumé ci-dessous :

- ❏ $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$
- ❏ $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$
- ❏ $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$
- ❏ $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$

3.3 Factorisation & linéarisation

La factorisation des cosinus et sinus d'angle peut se faire selon :

- ❏ $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- ❏ $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- ❏ $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- ❏ $\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

On peut également écrire ces relations en mettant en avant la forme factorisée :

- ❏ $\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$
- ❏ $\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)$
- ❏ $\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$

3.4 Utilisation des complexes

Les relations précédentes peuvent se déduire des notations complexes :

- ❏ $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}x} = \cos x + \mathrm{j}\sin x$
- ❏ $\forall z \in \mathbb{C},\ \exists r \in \mathbb{R}^+,\ \exists \theta \in [0, 2\pi], z = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$
- ❏ $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}x}}{2}$
- ❏ $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}x}}{2\mathrm{j}}$