2 Analyse vectorielle

2.1 Gradient d'un champ scalaire

On étudie une fonction scalaire f qui dépend des coordonnées (x, y, z) du point M où elle est évaluée.

2.1.1 Définition

En remarquant que $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}x\,\vec{u}_x + \mathrm{d}y\,\vec{u}_y + \mathrm{d}z\,\vec{u}_z$, on peut alors définir l'opérateur gradient :

Opérateur gradient

On appelle gradient, l'opérateur transformant un champ scalaire en champ vectoriel, et vérifiant :

$$\mathrm{d}f = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$$

2.1.2 Opérateur gradient en coordonnées cartésiennes

Opérateur gradient en coordonnées cartésiennes

Soit le champ scalaire $f : M(x, y, z) \to f(x, y, z)$, le gradient de f s'exprime en coordonnées cartésiennes par :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{y,z} \vec{u}_x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,z} \vec{u}_y + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{x,y} \vec{u}_z$$

2.1.3 Théorème du gradient

Les bilans que sont effectués sur des ensembles macroscopiques gagnent parfois à être calculés sur leur surface extérieure où à l'intérieur du volume qu'elle définit.

Théorème du gradient

Soit un volume $\mathcal{V}$, délimité par la surface fermée $S(\mathcal{V})$, orientée de l'intérieur vers l'extérieur, et un champ champ scalaire $f : M(x, y, z) \to f(x, y, z)$, continument différentiable en tout point de l'intérieur de $\mathcal{V}$:

$$\oiint_{S(\mathcal{V})} f\,\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iiint_{\mathcal{V}} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\,\mathrm{d}V$$

2.2 Divergence d'un champ vectoriel

Soit le champ vectoriel $M(x,y,z) \to \vec{A}(M) = A_x(x,y,z)\vec{u}_x + A_y(x,y,z)\vec{u}_y + A_z(x,y,z)\vec{u}_z$, la divergence de $\vec{A}$ est une grandeur scalaire qui mesure le défaut de conservation du volume $V = A_x \times A_y \times A_z$ au cours du temps.

2.2.1 Divergence en coordonnées cartésiennes

Opérateur divergence en coordonnées cartésiennes

Soit le champ vectoriel $\vec{A} : M(x,y,z) \to \vec{A}(M) = A_x(x,y,z)\vec{u}_x + A_y(x,y,z)\vec{u}_y + A_z(x,y,z)\vec{u}_z$, la divergence de $\vec{A}$ s'exprime en coordonnées cartésiennes par :

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = \left.\frac{\partial A_x}{\partial x}\right|_{y,z} + \left.\frac{\partial A_y}{\partial y}\right|_{x,z} + \left.\frac{\partial A_z}{\partial z}\right|_{x,y}$$

Remarque

On retiendra les conséquences suivantes de la valeur de $\mathrm{div}\,\vec{A}$ en un point M du champ de $\vec{A}$:
- $\mathrm{div}\,\vec{A} = 0$: Les lignes de champ sont parallèles entre elles,
- $\mathrm{div}\,\vec{A} < 0$: Les lignes de champ se rapprochent les unes des autres, on dit qu'elles convergent,
- $\mathrm{div}\,\vec{A} > 0$: Les lignes de champ s'écartent les unes des autres, on dit qu'elles divergent.

2.2.2 Théorème de Green - Ostrogradsky

Théorème de Green - Ostrogradsky

Soit un volume $\mathcal{V}$, délimité par la surface fermée $S(\mathcal{V})$, orientée de l'intérieur vers l'extérieur, et un champ vectoriel $\vec{A}$ continument différentiable en tout point de l'intérieur de $\mathcal{V}$. On a :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\,\vec{A}\mathrm{d}V = \oiint_{S(\mathcal{V})} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

2.3 Laplacien d'un champ scalaire

2.3.1 Définition

Opérateur Laplacien d'un champ scalaire

On appelle *laplacien*, l'opérateur transformant un champ scalaire en un autre champ scalaire, et vérifiant :

$$\Delta f = \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\right)$$

2.3.2 Opérateur laplacien en coordonnées cartésiennes

Opérateur laplacien d'un champ scalaire en coordonnées cartésiennes

Soit le champ scalaire $f : M(x,y,z) \to f(x,y,z)$, le laplacien de f s'exprime en coordonnées cartésiennes par :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

2.4 Rotationnel d'un champ vectoriel

2.4.1 Opérateur rotationnel en coordonnées cartésiennes

Opérateur rotationnel d'un champ vectoriel en coordonnées cartésiennes

Soit le champ vectoriel $\vec{A} : M(x,y,z) \to \vec{A} = A_x(x,y,z)\vec{u}_x + A_y(x,y,z)\vec{u}_y + A_z(x,y,z)\vec{u}_z$, le rotationnel de $\vec{A}$ s'exprime en coordonnées cartésiennes par :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Remarque

La valeur de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$ en un point M du champ de $\vec{A}$ donne la tendance qu'ont les particules fluides à tourner autour de M :
- $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = 0$: Les particules fluides ne tournent pas autour de M. L'écoulement est dit « irrotationnel »,
- $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} < 0$: Les particules fluides tournent autour de M dans le sens horaire. L'écoulement est dit « rotationnel »,
- $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} > 0$: Les particules fluides tournent autour de M dans le sens trigonométrique. L'écoulement est dit « rotationnel ».

2.5 Laplacien d'un champ vectoriel

Opérateur Laplacien d'un champ vectoriel

On appelle *laplacien* d'un champ vectoriel, l'opérateur transformant un champ vectoriel en un autre champ vectoriel, et vérifiant :

$$\Delta\vec{A} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\,\vec{A}\right) - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}\right)$$

Opérateur laplacien d'un champ vectoriel en coordonnées cartésiennes

Soit le champ vectoriel $\vec{A} : M(x,y,z) \to \vec{A} = A_x(x,y,z)\vec{u}_x + A_y(x,y,z)\vec{u}_y + A_z(x,y,z)\vec{u}_z$, le laplacien de $\vec{A}$ s'exprime en coordonnées cartésiennes par :

$$\Delta\vec{A} = \Delta A_x\vec{u}_x + \Delta A_y\vec{u}_y + \Delta A_z\vec{u}_z$$

2.6 Opérateur « nabla »

En coordonnées cartésiennes, où les vecteurs $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ sont des champs de vecteurs unitaires constants, on pourra gagner en efficacité en employant l'opérateur « nabla ».

Opérateur nabla

On appelle nabla l'opérateur différentiel vectoriel, noté $\vec{\nabla}$, qui s'exprime sous forme de vecteur :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z$$

ou sous forme matricielle :

$$\vec{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

On retiendra alors les opérateurs présentés précédemment sous la forme :

Opérateurs vectoriels et « nabla »

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \vec{\nabla} \times f = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$$

$$\mathrm{div}\, \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{bmatrix}$$

2.7 Identités entre opérateurs

Un certain nombre d'identités entre opérateurs sont fréquemment rencontrées et doivent être connues. La première est à la base de l'établissement des équations de propagation d'ondes électromagnétiques :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{E}\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\, \vec{E}\right) - \Delta \vec{E}}$$

La suivante sert formellement de définition pour l'opérateur laplacien, mais est utile pour établir l'équation de Poisson des potentiels électrostatiques :

$$\boxed{\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V\right) = \Delta V}$$

Deux combinaisons permettent également d'établir une égalité à zéro, utilisée notamment pour établir la conservation de la charge en électrodynamique :

$$\boxed{\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{B}\right) = 0 \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, T\right) = 0}$$

2.8 Opérateurs en coordonnées cylindriques & sphériques

2.8.1 Coordonnées cylindriques (hors programme)

❑ Gradient :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(r, \theta, z) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$$

- Divergence :

$$\operatorname{div}\vec{A}(r,\theta,z) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(A_z)$$

- Rotationnel :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}(r,\theta,z) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial rA_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_z$$

- Laplacien d'un champ scalaire :

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

2.8.2 Coordonnées sphériques (hors programme)

- Gradient :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$$

- Divergence :

$$\operatorname{div}\vec{A}(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}(A_\varphi)$$

- Rotationnel :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial \sin\theta A_\varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial rA_\varphi}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial rA_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_\varphi$$

- Laplacien d'un champ scalaire :

$$\Delta f(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$